КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ф.Г. АВХАДИЕВ

КОНФОРМНО ИНВАРИАНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

КАЗАНЬ
2020

УДК 517.54
ББК 22.16
А18

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор
Семен Рафаилович Насыров

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор **Б.А. Кац;**
доктор физико-математических наук,
профессор **Ю.В. Обносов;**
доктор физико-математических наук,
профессор **П.Л. Шабалин**

Авхадиев Ф.Г.
А18 **Конформно инвариантные неравенства** / Ф.Г. Авхадиев. — Казань: Издательство Казанского университета, 2020. — 260 с.

ISBN 978-5-00130-295-7

В монографии описаны изопериметрические проблемы и конформно инвариантные интегральные неравенства в плоских и пространственных областях, снабженных гиперболической метрикой Пуанкаре. Предназначена для аспирантов и молодых ученых, интересующихся геометрическим анализом.

Библиография: 118 названий.

УДК 517.54
ББК 22.16

ISBN 978-5-00130-295-7

© Авхадиев Ф.Г., 2020
© Издательство Казанского университета, 2020

Посвящаю моему внуку Максиму

Предисловие

Нашей основной целью является систематическое изложение одного из новых направлений в геометрическом анализе. Речь идет о конформно инвариантных интегральных неравенствах в плоских и пространственных областях.

Свойство инвариантности позволяет нам объединить в одно направление разрозненные результаты, которые получили А. Анкона [50] (1986 год), Д. Салливан [117] (1987 год), Х. Л. Фернандес и Х. М. Родригес [81], [82] (1989 и 1990 годы), автор [3], [4] (1998 год), В. М. Миклюков и М. Вуоринен [98] (1999 год).

Простейшее конформно инвариантное неравенство в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, конформно эквивалентной единичному кругу, имеет вид

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 \, dx\, dy \geq \iint_\Omega \frac{|u(z)|^2}{R^2(z,\Omega)} \, dx\, dy \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (1)$$

где $R(z,\Omega)$ – конформный радиус области в точке $z = x + iy$.

Инвариантность этого неравенства при однолистных конформных преобразованиях области обусловлена тем, что величина $\lambda_\Omega(z) = 1/R(z,\Omega)$ является коэффициентом конформно инвариантной метрики Пуанкаре, связанной с геометрией Лобачевского и имеющей гауссову кривизну $\kappa = -4$. Неравенство (1) и его обобщения по форме и идейно близки к многомерным вариационным неравенствам Харди, систематизированным в книге А. А. Балинского, У. Д. Эванса и Р. Т. Люиса [66] (2015 год).

Главы 1-2 настоящей монографии посвящены дифференциальным и интегральным свойствам конформного и гиперболического радиуса. Описаны базовые сведения, а также современные результаты, в частности, изопериметрические неравенства для конформных моментов односвязных областей и теоремы сравнения характеристик Х. Поммеренке [102], [104] и Р. Гармелина [87] для многосвязной области, имеющей равномерно совершенную границу. В главе 2 приведены также несколько результатов автора по универсальным интегральным неравенствам.

В главе 3 изложены конформно инвариантные интегральные неравенства в плоских и пространственных областях. Основное внимание уделено конформно инвариантным аналогам неравенств типа Харди и Реллиха для пробных функций, заданных в областях на плоскости. В пространственном случае мы пользуемся метрикой Пуанкаре для шара и полупространства, а также гиперболической метрикой, предложенной К. Лёвнером и Л. Ниренбергом [96] в 1974 году для n-мерной области общего вида.

В главе 4 описаны евклидово инвариантные неравенства, а в главе 5 представлены применения к задачам математической физики. В главе 6 даны исторические сведения, списки основных характеристик областей и использованной литературы, а также аннотация и оглавление монографии на английском языке.

При отборе материала для книги всегда присутствует субъективный фактор. Наибольшее внимание в монографии уделено тем разделам теории, в разработке которых автор принимал активное участие. На выбор материала и стиль изложения повлияло также стремление автора к доступности содержания книги широкому кругу математиков.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 18-11-00115.

Казанский федеральный
университет, март 2020 года — Ф. Г. Авхадиев

Оглавление

Глава 1

Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского

Важным для нас является следующий факт: для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, коэффициент метрики Пуанкаре с гауссовой кривизной $\kappa = -4$ определяется формулой

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{1}{R(z, \Omega)}, \quad z \in \Omega,$$

где $R(z, \Omega)$ – конформный радиус области Ω в точке z.

Напомним стандартное определение конформного радиуса. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, причем $\Omega \neq \mathbb{C}$, и $z_0 \in \Omega$ – фиксированная точка. Эта область конформно эквивалентна единичному кругу $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. А именно, по теореме Римана о конформных отображениях существует однолистное конформное отображение φ области Ω на круг $\mathbb{D}$, нормированное условиями $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) = \Re\varphi'(z_0) > 0$. Очевидно, функция $g(z) = \varphi(z)/\varphi'(z_0)$ удовлетворяет условиям

$$g(z_0) = 0, \qquad g'(z_0) = 1$$

и осуществляет конформное отображение области Ω на круг радиуса $R = 1/\varphi'(z_0)$. Эта величина и называется *конформным радиусом области* Ω *в точке* z_0. Будем пользоваться следующим обозначением: $R = R(z_0, \Omega) = 1/\varphi'(z_0)$.

Пусть, теперь, $f : \mathbb{D} \to \Omega$ – одно из однолистных конформных отображений круга $\mathbb{D}$ на область Ω, и пусть φ^{-1}– функция, обратная к функции φ. Пусть $z_0 = f(\zeta_0)$, где $\zeta_0 \in \mathbb{D}$. Тогда, в силу единственности римановой отображающей функции, существуют конформный автоморфизм T круга $\mathbb{D}$, т. е. функция вида

$$T(\zeta) = \frac{e^{i\gamma}\zeta + \zeta_0}{1 + e^{i\gamma}\overline{\zeta_0}\zeta}$$

и постоянная $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что $f(T(\zeta)) = \varphi^{-1}(\zeta)$, $e^{i\gamma} f'(\zeta_0) > 0$. Вычисляя производную функции $f(T(\zeta))$ в точке $\zeta = 0$, легко получаем, что $e^{i\gamma} f'(\zeta_0)(1 - |\zeta_0|^2) = R(z_0, \Omega)$.

Ясно, что фактически однозначно определена функция

$$R(., \Omega) : \Omega \to (0, \infty),$$

которая оказывается вещественно аналитической. Для любого однолистного конформного отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega$ в любой точке $\zeta \in \mathbb{D}$ можем записать равенство

$$|f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2) = R(f(\zeta), \Omega). \qquad (1.1)$$

Полагая $f(z) = z$ или $f(z) = (1 + z)/(1 - z)$, получаем формулы $R(z, \mathbb{D}) = 1 - |z|^2$, $R(x + iy, \mathbb{H}^+) = 2\,x$ для конформных радиусов круга и полуплоскости $\mathbb{H}^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = \Re z > 0\}$.

1.1 Гиперболическая метрика в круге

Согласно модели Пуанкаре множество точек единичного круга $\mathbb{D}$ рассматривается в качестве множества точек плоскости Лобачевского. Роли прямых в такой плоскости Лобачевского "исполняют" диаметры круга $\mathbb{D}$ и дуги окружностей, ортогональных к единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ и соединяющие две точки этой окружности. Именно эти линии являются геодезическими в метрике Пуанкаре, т. е. их дуги реализуют минимальное расстояние между двумя точками, если дифференциальный элемент длины взят в следующем виде $d\sigma_{\mathbb{D}} = |d\zeta|/(1-|\zeta|^2) = ds/(1-|\zeta|^2)$, где $|d\zeta| = ds$ – дифференциальный элемент длины в евклидовой метрике. Легко показать, что гиперболическое расстояние между точками $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{D}$ дается формулой

$$\rho_{\mathbb{D}}(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(1+\left|\frac{\zeta_1-\zeta_2}{1-\overline{\zeta_1}\,\zeta_2}\right|\right)\left(1-\left|\frac{\zeta_1-\zeta_2}{1-\overline{\zeta_1}\,\zeta_2}\right|\right)^{-1}\right).$$

Функцию $\lambda_{\mathbb{D}}$, определенную равенством

$$\lambda_{\mathbb{D}}(\zeta) = \frac{1}{1-|\zeta|^2}, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

называют коэффициентом метрики Пуанкаре (или гиперболической метрики) в круге $\mathbb{D}$.

Теорема 1.1 *Метрика Пуанкаре единичного круга является конформно инвариантной: для любого конформного автоморфизма T круга $\mathbb{D}$ имеет место равенство*

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2} = \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \qquad \forall\zeta \in \mathbb{D},\ z = T(\zeta).$$

Действительно, так как

$$z = T(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{\zeta - a}{1-\overline{a}\zeta} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}),$$

то имеем

$$|T'(\zeta)| = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\zeta|^2}$$

и

$$1-|z|^2 = 1-|T(\zeta)|^2 = \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}\zeta|^2} = (1-|\zeta|^2)|dz/d\zeta|.$$

Часто используется модель Пуанкаре, в которой роль плоскости Лобачевского играет полуплоскость $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Точками неевклидовой геометрии в этой модели считаются точки верхней полуплоскости, в качестве прямых берутся полупрямые и полуокружности, ортогональные к вещественной оси и описываемые уравнениями вида $\{z \in \mathbb{C} : z = x+iy,\, y > 0, x = x_0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : z = x+iy,\, y > 0, |z-x_0| = r\}$, где $x_0 \in \mathbb{R}$ и $r \in (0,+\infty)$ – параметры. Меняя эти параметры в пределах их допустимых значений, мы получаем семейство прямых плоскости Лобачевского. В этой модели Пуанкаре дифференциальный элемент длины берется в следующем виде $d\sigma_H = |dz|/(2\,y)$, где $|dz| = ds$ – дифференциальный элемент длины в евклидовой метрике.

1.2 Перенос на односвязные области

Рассмотрим теперь на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ односвязную область Ω, имеющую более одной граничной точки. Пользуясь однолистным конформным отображением $f : \mathbb{D} \to \Omega$, мы можем перенести геометрию Лобачевского с круга на область Ω. Для этого достаточно определить дифференциальный элемент длины в области Ω в следующем виде

$$d\sigma_\Omega(z) = \lambda_\Omega(z)|dz| := \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2},$$

где $z = f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$ и $z \in \Omega$. Таким образом, коэффициент метрики Пуанкаре в области Ω определен равенством

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{1}{|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}, z = f(\zeta).$$

На основании теоремы 1.1 и определения метрики в области Ω легко доказывается, что метрика Пуанкаре области Ω является конформно инвариантной.

Мы снова определяем радиус формулой (1.1), т. е. формулой $|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2) = R(f(\zeta), \Omega)$, для любой односвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, имеющей более одной граничной точки. Из этой формулы следует, что функция $R(z, \Omega)$ является вещественно аналитической в любой конечной точке области.

Если $\infty \in \Omega$, то в достаточно малой окрестности этой точки вещественно аналитическими являются функции

$$R(z,\Omega)/|z|^2, \quad |\nabla R(z,\Omega)|/|z|, \quad \Delta R(z,\Omega),$$

причем существуют пределы

$$\lim_{z\to\infty} \frac{R(z,\Omega)}{|z|^2} > 0, \ \lim_{z\to\infty} \frac{|\nabla R(z,\Omega)|}{|z|} > 0, \ \lim_{z\to\infty} \Delta R(z,\Omega) = 4.$$

Эти утверждения нетрудно проверяются с использованием формулы (1.1) и локального разложения для функции f в окрестности точки $\zeta_0 = f^{-1}(\infty)$:

$$f(\zeta) = \frac{A}{\zeta - \zeta_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\zeta - \zeta_0)^n \qquad (A \neq 0).$$

Следствием формулы (1.1) являются хорошо известные, эквивалентные друг другу, уравнения Лиувилля

$$\Delta \ln R = -\frac{4}{R^2}$$

и

$$R\Delta R = |\nabla R|^2 - 4,$$

где $R = R(z,\Omega)$, $z = x + iy \in \Omega$. При выводе этих уравнений, содержащих градиент и лапласиан $R(z,\Omega)$, удобно пользоваться операторами Виртингера формального дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

и следующими формулами

$$\Delta R(z,\Omega) = 4\frac{\partial^2 R(z,\Omega)}{\partial z\,\partial \overline{z}}, \qquad \nabla R(z,\Omega) = 2\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial \overline{z}}.$$

1.3 От Шварца до Бибербаха и далее

Следующие две теоремы хорошо известны (см. [47] и [64]).

Теорема 1.2 (Теорема сравнения.) *Пусть* Ω *и* Π – *односвязные области на расширенной плоскости, снабженные метрикой Пуанкаре. Если* $\Omega \subset \Pi$, *то в любой точке* $z \in \Omega$ *справедливо неравенство* $R(z,\Omega) \le R(z,\Pi)$. *Равенство* $R(z,\Omega) = R(z,\Pi)$ *при* $z \ne \infty$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\Omega = \Pi$.

Доказательство. Если $z = \infty$, то $R(z,\Omega) = R(z,\Pi) = \infty$ и доказывать нечего. Предположим, что фиксированная точка $z \in \Omega \subset \Pi$, $z \ne \infty$. Рассмотрим однолистные конформные отображения

$$f_1 : \mathbb{D} \to \Omega, \qquad f_2 : \mathbb{D} \to \Pi,$$

нормированные условиями

$$f_1(0) = f_2(0) = z, \qquad f_1'(0) > 0, \quad f_2'(0) > 0.$$

Тогда функция $\varphi(\zeta) := f_2^{-1}(f_1(\zeta))$ является аналитической в круге $\mathbb{D}$, кроме того, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(\zeta)| < 1$ и

$$\varphi'(0) = \lambda_\Pi(z)/\lambda_\Omega(z) = R(z, \Omega)/R(z, \Pi).$$

Таким образом, $\varphi'(0) > 0$, а по лемме Шварца имеем $\varphi'(0) \leq 1$, что влечет искомое неравенство $R(z, \Omega) \leq R(z, \Pi)$. Равенство $\varphi'(0) = 1$, согласно лемме Шварца, возможно тогда и только тогда, когда φ – тождественное отображение. Но в этом случае $\varphi'(0) = 1$ и $\varphi(\zeta) \equiv \zeta$. Следовательно, $f_1(\zeta) \equiv f_2(\zeta)$, что равносильно равенству $\Omega = \Pi$. Этим и завершается доказательство.

Теорема 1.3 (Шварца-Пика.) *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и* $\Pi \subset \mathbb{C}$ *– односвязные области, снабженные метрикой Пуанкаре. Если функция* $F(z)$ *аналитична в области* Ω *и* $F(\Omega) \subset \Pi$, *то в каждой точке* $z \in \Omega$ *справедливо неравенство*

$$|F'(z)| \leq \frac{R(F(z), \Pi)}{R(z, \Omega)}.$$

Равенство $|F'(z)| = R(F(z), \Pi)/R(z, \Omega)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* F *– однолистное конформное отображение области* Ω *на область* Π.

Доказательство. Фиксируем точку $z \in \Omega$. Возьмем однолистные конформные отображения $f_1 : \mathbb{D} \to \Omega$, $f_2 : \mathbb{D} \to \Pi$, нормированные условиями $f_1(0) = z, f_2(0) = F(z)$ и $f_1'(0) > 0, f_2'(0) > 0$. Имеем $f_1'(0) = R(z, \Omega)$, $f_2'(0) = R(F(z), \Pi)$.

Полагая $\varphi(\zeta) :\equiv f_2^{-1}(F(f_1(\zeta)))$, $\zeta \in \mathbb{D}$, определим функцию $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$. По лемме Шварца $|\varphi'(0)| \le 1$, поэтому

$$|\varphi'(0)| = \frac{|F'(z)|f_1'(0)}{f_2'(0)} = \frac{|F'(z)|R(z,\Omega)}{R(F(z),\Pi)} \le 1,$$

что влечет доказываемое неравенство.

Очевидно, равенство $|F'(z)| = R(F(z),\Pi)/R(z,\Omega)$ означает, что $|\varphi'(0)| = 1$. Но по лемме Шварца это имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(\zeta) \equiv e^{i\gamma}\zeta$, где γ – вещественная постоянная. В этом случае $e^{i\gamma}\zeta \equiv f_2^{-1}(F(f_1(\zeta)))$, $\zeta \in \mathbb{D}$, т. е.

$$F(w) \equiv f_2(e^{i\gamma} f_1^{-1}(w)), \quad w \in \Omega,$$

и очевидно, что F – однолистное конформное отображение области Ω на область Π. Теорема доказана.

Приведем теперь несколько базовых фактов из геометрической теории функций комплексного переменного.

Историю проблем, дальнейшие результаты и методы можно найти в монографиях Г. М. Голузина [23], А. У. Гудмана [85], Х. Поммеренке [103], [105], П. Л. Дюрена [79], С. С. Миллера и П. Т. Мокану [99].

Для знакомства с современными исследованиями можно рекомендовать статьи В. В. Горяйнова [25], В. Н. Дубинина [26], Л. А. Аксентьева и П. Л. Шабалина [48], Д. В. Прохорова [107], А. Ю. Солынина и М. Вуоринена [113], а также монографии С. Р. Насырова [35] и Й. Б. Гарнета и Д. Е. Маршалла [83].

Хорошо известна (см., например, [23] или [79]) следующая теорема Л. Бибербаха (1916 год). *Если функция f аналитична и однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$ и имеет там разложение*

$$f(\zeta) = \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \zeta^n,$$

то $|a_2| \leq 2$*. Равенство* $|a_2| = 2$ *имеет место тогда и только тогда, когда* f *– функция Кёбе, т. е.* $f(\zeta) = \zeta/(1 - e^{i\gamma}\zeta)^2$*, где* γ *– вещественная постоянная.*

Приведем с кратким доказательством равносильную геометрическую версию этой теоремы Л. Бибербаха. Для этого нам потребуется градиент конформного радиуса $R(z, \Omega)$:

$$\nabla R(z, \Omega) = 2\frac{\partial R(z, \Omega)}{\partial \overline{z}} := \frac{\partial R(z, \Omega)}{\partial x} + i\frac{\partial R(z, \Omega)}{\partial y},\ z = x + iy \in \Omega.$$

Теорема 1.4 *В любой точке односвязной области* $\Omega \subset \mathbb{C}, \Omega \neq \mathbb{C}$*, справедлива точная оценка* $|\nabla R(z, \Omega)| \leq 4$*,* $z = x + iy \in \Omega$*. Равенство* $|\nabla R(z, \Omega)| = 4$ *имеет место тогда и только тогда, когда область* Ω *имеет вид* $\Omega_L = \mathbb{C} \setminus L$*, где* L *– произвольно выбранный луч вида* $\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = w_0 + e^{i\gamma}t,\ 0 \leq t < \infty\}$*, а точка* z *лежит на продолжении этого луча внутрь области* Ω_L*.*

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная, но фиксированная точка области Ω. Рассмотрим однолистное конформное отображение $f : \mathbb{D} \to \Omega$, нормированное условиями $f(0) = z_0$ и $f'(0) > 0$. Тогда функция g, определенная равенством

$$f(\zeta) = z_0 + R(z_0, \Omega)g(\zeta) \qquad (\forall \zeta \in \mathbb{D}),$$

в единичном круге $\mathbb{D}$ представима рядом Тейлора вида

$$g(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots, \qquad |\zeta| < 1.$$

Пользуясь (1.1), легко проверить, что $2|a_2| = |\nabla R(z_0, \Omega)|$, поэтому задача сводится к доказательству неравенства $|a_2| \leq 2$. Для доказательства этого неравенства, фиксируя ветвь квадратного корня условием $\sqrt{1} = 1$, рассматриваем однолистные функции

$$g_1(\zeta) = \zeta\sqrt{\frac{g(\zeta^2)}{\zeta^2}} = \zeta + \frac{a_2}{2}\zeta^3 + \ldots, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

и

$$F(\zeta) = \frac{1}{g_1(\zeta)} = \frac{1}{\zeta} - \frac{a_2}{2}\zeta + o(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{D},\, \zeta \to 0.$$

Нужная нам оценка вытекает из следующего утверждения, доказанного в 1914 году Гронуоллом и часто называемого внешней теоремой площадей.

Теорема 1.5 (см. [23] или [79]). *Для однолистной в круге $\mathbb{D}$ функции F, представимой рядом Лорана*

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^k, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

справедлива точная оценка $\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2 \leq 1$. В частности, имеем $|\alpha_1| \leq 1$, и равенство $|\alpha_1| = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда F – функция Жуковского, т. е.

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + e^{i\alpha}\zeta \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Таким образом, неравенство $|\nabla R(z_0, \Omega)| \leq 4$ доказано. Очевидно, равенство $|\nabla R(z_0, \Omega)| = 4$ имеет место тогда и только тогда, когда $|\alpha_1| = 1$, т. е. когда экстремальная функция F – функция Жуковского. Соответствующие экстремальные функции g, f и экстремальная область $\Omega = f(\mathbb{D})$ легко определяются через функцию Жуковского и область ее значений. Таким образом, геометрическая версия теоремы Бибербаха доказана.

Теорема 1.6 (Теорема Кёбе об одной четвертой). *В любой точке z односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ ($\Omega \neq \mathbb{C}$) справедлива точная* *оценка*

$$\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geq \frac{1}{4}\, R(z, \Omega).$$

Равенство $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) = R(z, \Omega)/4$ *имеет место тогда и только тогда, когда область имеет вид* $\Omega_L = \mathbb{C} \setminus L$, *где* L – *произвольно выбранный луч вида* $\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = w_0 + e^{i\gamma} t,\ 0 \leq t < \infty\}$, *а точка* z *лежит на продолжении этого луча внутрь области* Ω_L.

Доказательство. Докажем неравенство в фиксированной точке $z_0 \in \Omega$. Существует точка $w_0 \in \partial\Omega$, такая что

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) = |z_0 - w_0|.$$

Рассмотрим однолистное конформное отображение $f : \mathbb{D} \to \Omega$, нормированное условиями $f(0) = z_0$ и $f'(0) > 0$. Тогда функция g, определенная равенством

$$f(\zeta) = z_0 + R(z_0, \Omega)\, g(\zeta) \qquad (\forall \zeta \in \mathbb{D}),$$

в единичном круге $\mathbb{D}$ представима рядом Тейлора вида

$$g(\zeta) = \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \dots \qquad .$$

Кроме того, $g(\zeta) \neq c$ при любом $\zeta \in \mathbb{D}$, где

$$c = \frac{w_0 - z_0}{R(z_0, \Omega)}, \qquad |c| = \frac{\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)}{R(z_0, \Omega)}.$$

Рассмотрим аналитическую и однолистную функцию $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, определенную равенством

$$h(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{1 - g(\zeta)/c} = \zeta + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right) \zeta^2 + o(\zeta^2), \quad \zeta \to 0.$$

Имеем: $|a_2| \le 2$ и $|a_2 + 1/c| \le 2$ по теореме Бибербаха. Поэтому

$$|c| = \frac{1}{|(a_2 + 1/c) - a_2|} \ge \frac{1}{4}.$$

Несложный анализ случая равенства $|c| = 1/4$ проводится так же, как и в теореме Бибербаха. Этим и завершается доказательство.

Следствие 1.6.1 *В любой точке z односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ $(\Omega \neq \mathbb{C})$ имеют место неравенства*

$$\frac{1}{4}\, R(z,\Omega) \le \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \le\ R(z,\Omega).$$

Действительно, левое неравенство дано теоремой Кёбе, т. е. теоремой 1.6. Правая оценка $\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) \le\ R(z_0,\Omega)$ получается из теоремы сравнения 1.2 для радиусов областей $\mathbb{D}_\delta \subset \Omega$, где

$$\delta = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega), \quad \mathbb{D}_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}.$$

Для ряда областей геометрические версии теорем Бибербаха и Кёбе могут быть уточнены. Например, если область Ω – полуплоскость, то $R(z,\Omega) \equiv 2\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$, $|\nabla R(z,\Omega)| \equiv 2$. Для выпуклой области справедливо следующее утверждение, которое будем называть теоремой Лёвнера (ср. с [62], [64]).

Теорема 1.7 *В выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, справедливы неравенства*

$$R(z,\Omega) \le 2\operatorname{dist}(z, \partial\Omega), \qquad |\nabla R(z,\Omega)| \le 2, \qquad \forall z \in \Omega.$$

Если область Ω не является полуплоскостью, то оба неравенства будут строгими.

Доказательство. Пусть $z_0 \in \Omega$, тогда найдется точка $w_0 \in \partial\Omega$, такая, что $\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) = |z_0 - w_0|$. Ясно, что существует полуплоскость Π, содержащая нашу выпуклую область, причем $w_0 \in \partial\Pi$, $\operatorname{dist}(z_0, \partial\Pi) = |z_0 - w_0|$. Применяя теорему 1.2, получаем

$$R(z_0, \Omega) \le R(z_0, \Pi) = 2\,|z_0 - w_0| = 2\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

Далее, как и при доказательстве геометрической версии теоремы Бибербаха, возьмем однолистное конформное отображение $f : \mathbb{D} \to \Omega$, нормированное условиями $f(0) = z_0$ и $f'(0) > 0$, функцию g, определенную равенством $f(\zeta) = z_0 + R(z_0, \Omega)g(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Функция g осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на некоторую выпуклую область и представима в $\mathbb{D}$ рядом Тейлора вида $g(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \ldots$. Как доказал К. Лёвнер в 1921 году, для такой функции справедлива оценка $|a_2| \le 1$, причем равенство $|a_2| = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда $g(\mathbb{D})$ – полуплоскость. Но $2|a_2| = |\nabla R(z_0, \Omega)|$, поэтому $|\nabla R(z_0, \Omega)| \le 2$, что и требовалось доказать.

Имеются аналоги теоремы 1.7 для областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, таких, что $\infty \in \overline{\Omega}$ и $\mathbb{C} \setminus \Omega$ – выпуклое множество (см. статьи автора, Х. Поммеренке, К.-Й. Вирца [59], автора и К.-Й. Вирца [62]).

Пусть $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ – мероморфная функция, отличная от константы. Через $S_f(\zeta)$ обозначим шварциан ($\equiv$ производную Шварца) функции f в точке $\zeta \in \mathbb{D}$:

$$S_f(\zeta) = \frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Для формулировки следующего утверждения, принадлежащего автору [55], потребуется также бигармонический оператор Δ^2. Точнее, нам потребуется функция φ, определяемая равенством $\varphi(z) = \Delta^2 R(z, \Omega) := \Delta(\Delta\, R(z, \Omega))$.

Теорема 1.8 *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область, конформно эквивалентная единичному кругу, и пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$ – одно-*

листное конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Тогда справедливо тождество

$$\frac{R^3(z,\Omega)}{4}\,\Delta^2 R(z,\Omega) \equiv (1-|\zeta|^2)^4\,\left|S_f(\zeta)\right|^2, \;\; z=f(\zeta)\in\Omega. \qquad (1.2)$$

Доказательство. Для краткости будем обозначать $R = R(z,\Omega)$. Поскольку R является вещественнозначной функцией, будем иметь

$$|\nabla R(z,\Omega)|^2 = 4\,\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial \overline{z}}, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \overline{z}^2} = \left|\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right|^2.$$

Непосредственными вычислениями с использованием уравнения Лиувилля $R\Delta R = |\nabla R|^2 - 4$ в форме

$$R\,\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial \overline{z}} = \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial \overline{z}} - 1$$

получаем

$$\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial \overline{z}} + R\frac{\partial^3 R}{\partial z^2\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(R\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial \overline{z}}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial \overline{z}} + \frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}.$$

Следовательно, будем иметь

$$R\frac{\partial^3 R}{\partial z^2\partial \overline{z}} = \frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\frac{\partial^2 R}{\partial z^2},$$

а также

$$\frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\frac{\partial^3 R}{\partial z^2\partial \overline{z}} + R\frac{\partial^4 R}{\partial z^2\partial \overline{z}^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \overline{z}^2} + \frac{\partial R}{\partial \overline{z}}\frac{\partial^3 R}{\partial z^2\partial \overline{z}}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{R}{16}\Delta^2 R = R\frac{\partial^4 R}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \overline{z}^2} = \left|\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right|^2 .$$

Пользуясь обратной функцией $f^{-1} = g$, приходим к формулам $R = \left(1 - g(z)\,\overline{g(z)}\right)(g'(z))^{-1/2}\left(\overline{g'(z)}\right)^{-1/2}$, $S_g(z) = -S_f(\zeta)/f'^2(\zeta)$. Непосредственными вычислениями получаем, что

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = -\frac{1-|g(z)|^2}{2\left(\overline{g'(z)}\right)^{1/2}}\left(\frac{g''(z)}{(g'(z))^{3/2}}\right)' = -\frac{R}{2}S_g(z) = \frac{R}{2f'^2(\zeta)}S_f(\zeta).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^4 R}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} = \frac{1}{4}\left|S_g(z)\right|^2 = \frac{1}{4|f'(\zeta)|^4}\left|S_f(\zeta)\right|^2 = \frac{(1-|\zeta|^2)^4}{4R^4}\left|S_f(\zeta)\right|^2,$$

что влечет тождество (1.2). Теорема доказана.

Из теоремы 1.8 с использованием гладкости $\Delta\, R(z,\Omega)$ в бесконечно удаленной точке (если $\infty \in \Omega$) и хорошо известных свойств производной Шварца, получаем

Следствие 1.8.1 *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область, конформно эквивалентная кругу $\mathbb{D}$. Тогда функция ψ, определенная равенством $\psi(z) = \Delta\, R(z,\Omega)$, является субгармонической в области Ω, причем $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Кроме того, функция ψ является гармонической в Ω тогда и только тогда, когда область Ω – либо круг, либо внешность круга, либо полуплоскость.*

Пользуясь тождеством (1.2) и неравенством Крауса-Нехари

$$|S_f(\zeta)| \le \frac{6}{(1-|\zeta|^2)^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

для однолистных конформных отображений $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$, получаем

Следствие 1.8.2 *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область, конформно эквивалентная единичному кругу $\mathbb{D}$. Имеет место неравенство*

$$\sqrt{R^3(z,\Omega)\Delta^2 R(z,\Omega)} \leq 12, \quad z \in \Omega.$$

1.4 Интегралы конформного радиуса

Интерес к интегралам вида $\iint_\Omega R^m(z,\Omega)dxdy$ обусловлен прикладными задачами. А именно, тем, что введенный нами конформный момент инерции области

$$I_c(\Omega) := \iint_\Omega R^2(z,\Omega)dxdy$$

привел к решению классической задачи о двусторонних оценках коэффициента жесткости кручения упругой балки с односвязным сечением Ω (см. ниже пункт 5.1, гл. 5).

Рассмотрим сначала формулу, выражающую евклидову (!) площадь области через гиперболическую характеристику.

Теорема 1.9 ([3]). *Евклидова площадь $S(\Omega) = \iint_\Omega dxdy$ любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой кривой, может быть найдена по формуле*

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\iint_\Omega |\nabla R(z,\Omega)|^2\, dxdy.$$

Доказательство. Пусть f – однолистное конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Фиксируем число $r \in (0,1)$ и рассмотрим область $\Omega_r = \{f(\zeta) : \zeta \in \mathbb{D},\ |\zeta| < r\} \subset \Omega$.

Очевидно, $S(\Omega) = \lim_{r\to 1} S(\Omega_r)$. По формуле Грина

$$\iint_{\Omega_r} \left(R(z,\Omega)\Delta R(z,\Omega) + |\nabla R(z,\Omega)|^2\right) dxdy =$$

$$= \int_{\partial\Omega_r} R(z,\Omega)\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial n}|dz|.$$

С учетом уравнения Лиувилля $R\Delta R = |\nabla R|^2 - 4$ получаем отсюда

$$S(\Omega_r) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega_r} |\nabla R(z,\Omega)|^2\,dxdy - \frac{1}{4}\int_{\partial\Omega_r} R(z,\Omega)\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial n}|dz|.$$

Поскольку по теоремам 1.4 и 1.6 Бибербаха и Кёбе

$$R(z,\Omega)\left|\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial n}\right| \le 16\,\mathrm{dist}(z,\partial\Omega),$$

то для области Ω со спрямляемой границей

$$\lim_{r\to 1}\int_{\partial\Omega_r} R(z,\Omega)\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial n}|dz| = 0.$$

Следовательно,

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\lim_{r\to 1}\iint_{\Omega_r} |\nabla R(z,\Omega)|^2\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} |\nabla R(z,\Omega)|^2\,dxdy,$$

что и требовалось доказать.

Приведем теперь изопериметрическое неравенство, доказанное автором и Р. Г. Салахудиновым [60].

Теорема 1.10 *Пусть $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, и пусть $R(.,\Omega)$ – конформный радиус односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Тогда*

$$\frac{\pi(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}\iint_{\Omega} R^{\alpha+\beta-2}(z,\Omega)dxdy \le$$

$$\le \iint_{\Omega} R^{\alpha-2}(z,\Omega)dxdy\iint_{\Omega} R^{\beta-2}(z,\Omega)dxdy. \tag{1.3}$$

При любых допустимых значениях параметров α и β равенство *в* (1.3) *с конечной правой частью имеет место тогда и только тогда, когда* Ω *– круг.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы, связанные с функциями Эйлера $\Gamma(x)$ и $\mathrm{B}(x,y)$.

Лемма 1.1 ([60]). *Для любых* $\alpha>0$, $\beta>0$ *и любого натурального числа* n *имеет место тождество*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{B}(k+\alpha,n-k+\beta)}{k!(n-k)!}=\frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{n!}. \tag{1.4}$$

Доказательство леммы 1.1. Коэффициенты ряда Тейлора для функции $(1-\zeta)^{-\alpha-\beta}$ можно вычислить двумя способами: непосредственно по определению ряда Тейлора или как результат произведения по Коши степенных рядов двух функций $(1-\zeta)^{-\alpha}$ и $(1-\zeta)^{-\beta}$. Имеем:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{n!}\zeta^n=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(1-\zeta)^{\alpha+\beta}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!}\zeta^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\beta)}{n!}\zeta^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)}{k!(n-k)!}\zeta^n.$$

Формула (1.4) – следствие единственности ряда Тейлора и классической формулы $\mathrm{B}(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$. Лемма доказана.

Лемма 1.2 ([60]). *Пусть* (a_k) *и* (b_k) *– произвольные последовательности комплексных чисел. Тогда для любых* $\alpha>0$, $\beta>0$ *и любого натурального числа* n *имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right|^2\le\frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!\ |a_kb_{n-k}|^2}{\mathrm{B}(k+\alpha,n-k+\beta)}. \tag{1.5}$$

Равенства в (1.5) *достигаются для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев:*

либо все a_k *равны нулю; либо все* b_k *равны нулю;*

либо $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ *и найдется постоянная* q *такая, что*

$$ka_k = \frac{a_0\, q^k}{\mathrm{B}(\alpha, k)},\ \ kb_k = \frac{b_0\, q^k}{\mathrm{B}(\beta, k)}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Применим неравенство Коши к векторам, определяемым формулами

$$u_k = \frac{a_k b_{n-k}\sqrt{k!\ (n-k)!}}{\sqrt{n!\ \mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta)}}$$

и

$$v_k = \frac{\sqrt{n!\ \mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta)}}{\sqrt{k!\ (n-k)!}}$$

для $k = 0, 1, \ldots, n$. Имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right|^2 = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_k\right|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |v_k|^2, \tag{1.7}$$

что и дает неравенство (1.5) в силу тождества (1.4). В неравенстве Коши равенство имеет место лишь для пропорциональных векторов. Поэтому равенства в (1.7) для всех n имеют место тогда и только тогда, когда $u_k = \lambda_n v_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, где λ_n зависит лишь от n. Следовательно, равенства в (1.5) имеют место тогда и только тогда, когда

$$k!(n-k)!\ a_k b_{n-k} = \lambda_n\ n!\ \mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta), \tag{1.8}$$

где $0 \leq k \leq n$. Первые два случая получаются просто. Действительно, если $a_0 = 0$, но не все a_k равны нулю, то $a_s \neq 0$ для некоторого номера $s \geq 1$. Но тогда из (1.8) следует, что $b_k = 0$

для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Меняя ролями a_k и b_k, получаем, что если $b_0 = 0$, то все a_k равны нулю.

Предположим теперь $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ и положим $n = 1$, тогда из (1.8) следует, что $a_1/(\alpha a_0) = b_1/(\beta b_0) = q$, где

$$q = \frac{\lambda_1 \mathrm{B}(\alpha, \beta)}{(\alpha + \beta) a_0 b_0}.$$

Для $n \geq 2$ имеем

$$\lambda_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}, \qquad \lambda_n = \frac{u_0}{v_0} = \frac{u_1}{v_1},$$

что равносильно соотношениям

$$a_n = q\,\frac{n + \alpha - 1}{n}\,a_{n-1}, \qquad b_n = q\,\frac{n + \beta - 1}{n}\,b_{n-1}.$$

Применение индукции приводит к равенствам (1.6). Этим и завершается доказательство леммы.

Доказательство теоремы 1.10. Заменой переменных при помощи однолистного конформного отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega$, можем перейти к интегралам по единичному кругу $\mathbb{D}$. Рассмотрим две аналитические функции, имеющие следующие ряды Тейлора в $\mathbb{D}$

$$F(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots\,,$$

$$G(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \cdots\,,$$

и определяемые равенствами $F(\zeta) = f'(\zeta)^{\alpha/2}$, $G(\zeta) = f'(\zeta)^{\beta/2}$. Неравенство (1.3) равносильно следующему

$$A_{\alpha+\beta}(FG) \leq A_\alpha(F) A_\beta(G),$$

где

$$A_s(g) := \frac{s-1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |g(re^{i\theta})|^2 (1-r^2)^{s-2} r dr d\theta =$$

$$= \Gamma(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+s)} |c_n|^2,$$

а $c_n = g^{(n)}(0)/n!$ – коэффициенты ряда Тейлора функции g. Легко видеть, что (1.3) равносильно неравенству

$$\Gamma(\alpha+\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right|^2 \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} \leq$$

$$\leq \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!(n-k)!}{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)} |a_k b_{n-k}|^2.$$

Но это неравенство является следствием оценок (1.5), так как

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\beta)} \, \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\mathrm{B}(\alpha, \beta)}{\mathrm{B}(k+\alpha, n-k+\beta)}.$$

Поскольку $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, случай равенства в оценках реализуется для коэффициентов вида (1.6). Соответствующие функции имеют вид: $F(\zeta) = a_0/(1-q\zeta)^{\alpha}$, $G(\zeta) = b_0/(1-q\zeta)^{\beta}$. Условие аналитичности этих функций в единичном круге влечет неравенство $|q| \leq 1$, а условие ограниченности интегралов $A_\alpha(F),\ A_\beta(G)$ приводит к строгому неравенству $|q| < 1$. Но тогда для конформного отображения f получаем $f(\zeta) = (a_0^2/q)/(1-q\zeta) + \mathrm{const}$. Следовательно, $\Omega = f(\mathbb{D})$ – круг. Теорема доказана.

Следующая теорема об изопериметрических свойствах конформного радиуса для четных m доказана Р. Г. Салахудиновым, а для нечетных m – автором (см. [5] и [60]).

Теорема 1.11 *Пусть m – натуральное число, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область с конечной площадью $S(\Omega)$, $R(z, \Omega)$ – конформный* *радиус Ω в точке $z \in \Omega$. Тогда*

$$\iint_\Omega R^m(x,\Omega)dxdy \leq \frac{S^{1+m/2}(\Omega)}{(m+1)\pi^{m/2}}. \tag{1.9}$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда Ω – круг.

Доказательство теоремы 1.11. Для четных показателей m неравенство (1.9) может быть доказано методом математической индукции с использованием изопериметрического неравенства (1.3).

1) Пусть $m = 2k$ – четное число, проводим индукцию по k. Полагая $\alpha = 2$, $\beta = 2$ в (1.3), получаем требуемое при $k = 1$ базовое неравенство

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)dxdy \leq \frac{S^2(\Omega)}{3\pi}.$$

Индуктивный переход от случая $m = 2k$ к случаю $m = 2k+2$ гарантирует неравенство

$$\iint_\Omega R^{2k+2}(z,\Omega)dxdy \leq \frac{(2k+1)\,S(\Omega)}{\pi(2k+3)} \iint_\Omega R^{2k}(z,\Omega)dxdy,$$

получаемое из (1.3) при $\alpha = 2k+2$, $\beta = 2$.

2) Рассмотрим случай нечетных m. Для нечетного числа $m = 2k+1 \geq 3$ применяем оценку (1.3) при $\alpha = 2k$ и $\beta = 3$. Будем иметь

$$\iint_\Omega R^{2k+1}(z,\Omega)dxdy \leq$$

$$\leq \frac{2k-1}{\pi(k+1)} \iint_\Omega R^{2k-2}(z,\Omega)dxdy \iint_\Omega R(z,\Omega)dxdy, \tag{1.10}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда область Ω – круг. Оценивая правую часть в (1.10) с применением (1.9) для случаев $m = 1$ и $m = 2k-2$, получим требуемое неравенство (1.9) для $m = 2k+1$. Поскольку $m = 2k-2$ является четным числом, то неравенство (1.9) для этого случая уже доказано. Остается доказать утверждение теоремы 1.11 для $m = 1$.

Лемма 1.3 *Пусть Ω – односвязная область на плоскости с конечной площадью $S(\Omega)$. Тогда конформный радиус $R(z,\Omega)$ удовлетворяет неравенству*

$$\iint_\Omega R(z,\Omega)dxdy \leq \frac{S(\Omega)\sqrt{S(\Omega)}}{2\sqrt{\pi}}. \qquad (1.11)$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда Ω – круг.

Доказательство леммы 1.3. Пусть $f : D \to \Omega$ – однолистное конформное отображение круга $\mathbb{D} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{C} : \xi^2 + \eta^2 < 1\}$ на область Ω. Полагаем

$$\Omega_j = \left\{ f(\xi,\eta) : \sqrt{\xi^2+\eta^2} < \rho_j = \frac{j}{1+j} \right\},$$

где $j = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $\Omega_1 \subset \Omega_j \subset \Omega$, $\quad \cup_{j=1}^{\infty}\Omega_j = \Omega$, для любого натурального j область Ω_j является односвязной областью, ограниченной аналитической кривой. Известно, что с расширением области конформный радиус растет (см. теорему 1.2). Следовательно, если $z \in \Omega_j$, то $R(z,\Omega_j) < R(z,\Omega_{j+1}) < R(z,\Omega)$ для любого натурального j. Из теоремы Каратеодори о сходимости областей (см. [23]) легко следует, что $\lim_{j\to\infty} R_0(z,\Omega_j) = R(z,\Omega_j)$ равномерно на любом компакте $K \subset \Omega$. Здесь

$$R_0(z,\Omega_j) = \begin{cases} R(z,\Omega_j), & z \in \Omega_j; \\ 0 & , z \in \Omega \setminus \Omega_j. \end{cases}$$

Далее потребуется коэффициент жесткости кручения $P(\Omega)$ области Ω (см., например, [36]), определяемый формулами

$$P(\Omega) = \sup \left\{ I(u;\Omega) \,:\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega) \right\},$$

где

$$I(u;\Omega) = \left(2 \iint_\Omega u(z) dxdy \right)^2 \Big/ \iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 dxdy\ .$$

Область Ω_j имеет гладкую границу. Поэтому

$$R(\cdot,\Omega_j) \in C^\infty(\Omega_j) \cap C^1(\overline{\Omega_j}), \qquad R(z,\Omega_j) = 0 \quad \text{для} \quad z \in \partial\Omega_j.$$

Следовательно, $R(\cdot,\Omega_j) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega_j)$. Но тогда

$$P(\Omega_j) = \sup \left\{ I(u;\Omega_j) \,:\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega_j) \right\} \geq I(R;\Omega_j) :=$$

$$= \left(2 \iint_{\Omega_j} R(z,\Omega_j) dxdy \right)^2 \Big/ \iint_{\Omega_j} |\nabla R(z,\Omega_j)|^2 dxdy\ .$$

Пользуясь теоремой 1.9, получаем неравенство

$$\frac{2}{S(\Omega_j)} \left(\iint_{\Omega_j} R(z,\Omega_j) dxdy \right)^2 \leq P(\Omega_j),$$

Отсюда следует, что для любого j

$$\left(\iint_{\Omega_j} R(z,\Omega_j) dxdy \right)^2 \leq \frac{S(\Omega_j) P(\Omega_j)}{2}.$$

Так как $\Omega_j \subset \Omega$, то $S(\Omega_j) \leq S(\Omega)$ и $P(\Omega_j) \leq P(\Omega)$. Следовательно, для любого j и любого компакта K, такого, что $\Omega_j \subset K \subset \Omega$, имеем

$$\left(\iint_K R_0(z,\Omega_j) dxdy \right)^2 \leq \frac{S(\Omega)\, P(\Omega)}{2}.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ и пользуясь произвольностью компакта K, $\Omega_j \subset K \subset \Omega$, окончательно имеем

$$\left(\iint_{\Omega} R(x,\Omega)dxdy\right)^2 \leq \frac{S(\Omega)\,P(\Omega)}{2}.$$

Продолжим последнее неравенство, оценивая жесткость кручения $P(\Omega)$ сверху с применением следующего изопериметрического неравенства Сен-Венана–Пойа (см., например, [36]):

$$P(\Omega) \leq \frac{S^2(\Omega)}{2\pi}. \tag{1.12}$$

Получаем требуемое неравенство

$$\left(\iint_{\Omega} R(z,\Omega)dxdy\right)^2 \leq \frac{S^3(\Omega)}{4\pi}.$$

Ясно, что равенство в этом неравенстве возможно лишь тогда, когда Ω – круг, так как этот факт имеет место для изопериметрического неравенства (1.12). С другой стороны, легко проверяется, что для любого круга имеет место равенство. Таким образом, лемма 1.3, а значит и теорема 1.11 доказаны полностью.

Глава 2

Метрика Пуанкаре в многосвязных областях

2.1 Гиперболический радиус

Пусть Ω – область на расширенной комплексной плоскости, имеющая не менее трех граничных точек.

По теореме Римана-Пуанкаре существует локально конформное, сохраняющее ориентацию отображение $f : \mathbb{D} \to \Omega$, причем $\Omega = f(\mathbb{D})$ и в достаточно малой окрестности любой точки $z_0 \in \Omega$ определен элемент обратной функции $F(z) = f^{-1}(z)$, который аналитически продолжи́м в области Ω по любому пути, лежащему в Ω. При этом все значения, принимаемые всевозможными аналитическими продолжениями в Ω этого элемента, лежат в круге $\mathbb{D}$. Такое отображение $f : \mathbb{D} \to \Omega$ называется универсальным накрывающим отображением. Доказательство этой теоремы, основанное на идеях Ф. Рисса и Л. Фейера, содержится в монографии Г. М. Голузина [23] по геометрической теории функций. Современное краткое изложение основ теории накрывающих отображений и гиперболической метрики Пуанкаре можно найти в первых двух главах лекционных курсов Е. М. Чирки [43].

Если Ω – односвязная область, то накрывающее отображение $f : \mathbb{D} \to \Omega$ совпадает с однолистным конформным отображением единичного круга на область Ω. Если же Ω не является односвязной, то накрывающее отображение не будет инъекцией.

Пусть T – конформный автоморфизм круга $\mathbb{D}$. Суперпозициями вида $f \circ T$ исчерпываются все накрывающие отображения $\mathbb{D}$ на Ω. Коэффициент метрики Пуанкаре, определяющий гиперболическую геометрию в Ω, задается равенством (см.[23] и [47])

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{1}{|f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2)}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}, \ \ z = f(\zeta).$$

В силу конформной инвариантности метрики Пуанкаре в единичном круге, эта формула однозначно определяет коэффициент гиперболической метрики многосвязной области несмотря на то, что выбор накрывающего отображения является неоднозначным.

Функцию $1/\lambda_\Omega(z)$ называют гиперболическим радиусом и обозначают $R(z, \Omega)$.

Таким образом, гиперболический радиус снова определяется формулой $|f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2) = R(f(\zeta), \Omega)$, где $f : \mathbb{D} \to \Omega$ – локально однолистное накрывающее отображение единичного круга на область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, имеющую не менее трех граничных точек.

Из этой формулы следует, что функция $R(z, \Omega)$ обладает, как и в случае односвязных областей, следующими свойствами.

1) Функция $R(\,.\,, \Omega) : \Omega \to (0, \infty]$ является вещественно аналитической в любой конечной точке области.

2) Если $\infty \in \Omega$, то в достаточно малой окрестности бесконечно удаленной точки вещественно аналитическими являются функции, определяемые формулами

$$R(z, \Omega)/|z|^2, \qquad |\nabla R(z, \Omega)|/|z|, \qquad \Delta R(z, \Omega),$$

причем существуют пределы

$$\lim_{z\to\infty}\frac{R(z,\Omega)}{|z|^2}>0,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{|\nabla R(z,\Omega)|}{|z|}>0,\quad \lim_{z\to\infty}\Delta R(z,\Omega)=4.$$

3) Следствием формулы $|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)=R(f(\zeta),\Omega)$ являются эквивалентные уравнения Лиувилля

$$\Delta\ln R=-\frac{4}{R^2}$$

и

$$R\Delta R=|\nabla R|^2-4,$$

где $R=R(z,\Omega)$, $z=x+iy\in\Omega$. При выводе этих уравнений снова можно пользоваться операторами Виртингера формального дифференцирования.

Явные выражения для $R(z,\Omega)$ известны лишь в некоторых случаях. В частности, для области $\Omega_{a,b,c}=\overline{\mathbb{C}}\setminus\{a,b,c\}$, где a,b,c – три различных точки, гиперболический радиус выражается формулой С. Агарда [46] (1968 год)

$$R(z,\Omega_{a,b,c})=\frac{|z-a||z-b||z-c|}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta-a||\zeta-b||\zeta-c||\zeta-z|}.$$

Аналог теоремы 1.2 также известен и доказывается точно так же, как и в односвязном случае. А именно, имеет место следующая

Теорема 2.1 *Пусть Ω и Π – области гиперболического типа на расширенной комплексной плоскости. Если $z\in\Omega\subset\Pi$, то*

$$\lambda_\Omega(z)\geq\lambda_\Pi(z)\Longleftrightarrow R(z,\Omega)\leq R(z,\Pi).$$

За исключением случая $z=\infty$, равенство $R(z,\Omega)=R(z,\Pi)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Omega=\Pi$.

Сравнивая гиперболические радиусы области и вписанного в эту область круга $\{w \in \Omega : |w - z| < \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)\}$, получаем

Следствие 2.1.1 *В любой точке z области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа имеет место неравенство*

$$\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \leq R(z, \Omega).$$

Выбирая в качестве области Π круг достаточно большого радиуса с выколотым центром $z_0 \in \partial\Omega$ или область вида $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, \infty\}$, $z_0 \neq z_1$, получаем

Следствие 2.1.2 *Вблизи любой точки $z_0 \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа имеет место соотношение*

$$R(z, \Omega) = O\left(\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)\ \ln \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}\right), \quad z \to z_0.$$

Через $A(\Omega, \Pi)$ обозначим множество локально голоморфных или мероморфных аналитических функций $F : \Omega \to \Pi$, вообще говоря многозначных, определенных в области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ и таких, что всевозможные значения $F(z)$ лежат в области $\Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Теорема 2.2 (Шварца-Пика). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ и $\Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$ – произвольные области гиперболического типа. Если функция*

$$F \in A(\Omega, \Pi),$$

то в каждой точке $z \in \Omega$ справедливо неравенство

$$|F'(z)| \leq \frac{R(F(z), \Pi)}{R(z, \Omega)}.$$

Если $z \neq \infty$ и $F(z) \neq \infty$, то равенство

$$|F'(z)| = R(F(z), \Pi)/R(z, \Omega)$$

имеет место тогда и только тогда, когда F – локально конформное накрывающее отображение области Ω на область Π.

Имеется ряд обобщений неравенства Шварца-Пика (см., например, [23], [47], [64]). Ниже приведены лишь два результата автора и К.-Й. Вирца о распространении неравенства Шварца-Пика на высшие производные.

Следуя [64], для производных функций $F \in A(\Omega, \Pi)$ рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{n!}\left|F^{(n)}(z)\right| \leq C_n(\Omega, \Pi)\frac{R(F(z), \Pi)}{R^n(z, \Omega)},$$

где $C_n(\Omega, \Pi)$ – наименьшая постоянная, возможная на этом месте, т. е. постоянная, определяемая равенством

$$C_n(\Omega, \Pi) = \sup_{z\in\Omega} \sup_{F\in A(\Omega,\Pi)} \frac{R^n(z, \Omega)\,|F^{(n)}(z)|}{n!\,R(F(z), \Pi)}.$$

Для случая $n = 2$ автором и К.-Й. Вирцом [64], гл. 4, доказана

Теорема 2.3 *Для всех областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $\Pi \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа*

$$2\,C_2(\Omega, \Pi) = 2\,C_2(\Pi, \Omega) = \sup_{z\in\Omega}|\nabla R(z, \Omega)| + \sup_{w\in\Pi}|\nabla R(w, \Pi)|.$$

Доказательство теоремы дано в [64], с. 66–68. Там же доказано

Следствие 2.3.1 *Пусть A_1 и A_2 – концентрические кольца вида $a_1 < |z - z_1| < b_1$, $a_2 < |z - z_2| < b_2$ с конечными конформными модулями $M_1 = (2\pi)^{-1}\ln(b_1/a_1)$, $M_2 = (2\pi)^{-1}\ln(b_2/a_2)$.*

Тогда $\quad C_2(A_1, A_2) = \sqrt{1 + 4\,M_1^2} + \sqrt{1 + 4\,M_2^2}.$

Если одна из областей $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ и $\Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$ содержит бесконечно удаленную точку, то $C_2(\Omega, \Pi) = C_2(\Pi, \Omega) = \infty$, так как модуль градиента гиперболического радиуса является величиной порядка $O(|z|)$ вблизи точки $z = \infty$. В подобной ситуации имеет смысл рассматривать неравенства вида

$$\frac{1}{n!}\left|F^{(n)}(z)\right| \leq M_n(z,\Omega,\Pi)\frac{R(F(z),\Pi)}{R^n(z,\Omega)},$$

где $M_n(z,\Omega,\Pi)$ – наименьшая постоянная, возможная на этом месте, т. е.

$$M_n(z,\Omega,\Pi) = \sup_{F\in A(\Omega,\Pi)} \frac{R^n(z,\Omega)\,|F^{(n)}(z)|}{n!\,R(F(z),\Pi)}.$$

В формулировке следующей теоремы нам потребуются гиперболические расстояния $\rho_\Omega(z,\infty)$ и $\rho_\Pi(F(z),\infty)$. Напомним, что гиперболическое расстояние $\rho_{\mathbb{D}}(0,p)$ между точками 0 и $p \in (0,1)$ в единичном круге $\mathbb{D}$ дается формулой

$$\rho_{\mathbb{D}}(0,p) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+p}{1-p} \Longleftrightarrow p = th\,\rho_{\mathbb{D}}(0,p).$$

Теорема 2.4 ([61]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ и $\Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязные области гиперболического типа. Предположим, что $\infty \in \Omega$ и $\infty \in \Pi$. Для любого $n \geq 2$, в любой точке $z \in \Omega$ и любой функции $F \in A(\Omega,\Pi)$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{n!}\left|F^{(n)}(z)\right| \leq \left(q+\frac{1}{q}+p+\frac{1}{p}\right)^{n-1}\frac{R(F(z),\Pi)}{R^n(z,\Omega)}, \tag{2.1}$$

где величины $p = p(z) \in (0,1)$ и $q = q(F(z)) \in (0,1)$ определены равенствами

$$\rho_\Omega(z,\infty) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+p}{1-p}, \qquad \rho_\Pi(F(z),\infty) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}.$$

Для каждого $n \geq 2$, *каждого* $p \in (0,1]$ *и каждого* $q \in (0,1]$ *существуют* $\Omega_0, \Pi_0, z \in \Omega_0 \setminus \{\infty\}$ *и* $F_0 \in A(\Omega_0, \Pi_0)$, *такие, что для них в* (2.1) *имеет место равенство с* $p = p(z)$ *и* $q = q(F_0(z))$.

Прямой аналог теоремы 1.8 является справедливым для любой области гиперболического типа.

Теорема 2.5 ([55]). *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – *область гиперболического типа, и пусть* $f : \mathbb{D} \to \Omega$ – *локально конформное накрывающее отображение круга* $\mathbb{D}$ *на область* Ω. *Тогда справедливо тождество*

$$\frac{R^3(z,\Omega)}{4}\,\Delta^2 R(z,\Omega) \equiv (1-|\zeta|^2)^4\;|S_f(\zeta)|^2,$$

где $z = f(\zeta) \in \Omega$, $S_f(\zeta)$ – *шварциан функции* f *в точке* $\zeta \in \mathbb{D}$.

В случае многосвязных областей доказательство остается по существу таким же, что и доказательство теоремы 1.8, приходится лишь иметь дело с ветвями многозначной обратной функции $g = f^{-1}$, не влияющими на вычисления. С использованием гладкости $\Delta\, R(z,\Omega)$ получаем

Следствие 2.5.1 *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – *область гиперболического типа. Тогда функция* ψ, *определенная равенством* $\psi(z) = \Delta\, R(z,\Omega)$, *является субгармонической в области* Ω, *причем* $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим область $\check{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ – круг с выколотым центром. Накрывающее отображение $f : \mathbb{D} \to \check{\mathbb{D}}$ можно определить формулой

$$f(\zeta) = \exp\left(-\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right), \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Имеем: гиперболический радиус $R(z,\check{\mathbb{D}}) = 2|z|\,\ln(1/|z|)$, конформный модуль $M(\check{\mathbb{D}}) = \infty$. Кроме того, имеют место соотношения

$$\alpha(\check{\mathbb{D}}) := \inf_{z\in\check{\mathbb{D}}} \operatorname{dist}(z,\partial\check{\mathbb{D}})/R(z,\check{\mathbb{D}} = 0,$$

$$\beta(\check{\mathbb{D}}) := \frac{1}{2}\sup_{\zeta\in\mathbb{D}}(1-|\zeta|^2)^2\ |S_f(\zeta)| = \infty,\ \gamma(\check{\mathbb{D}}) := \sup_{z\in\check{\mathbb{D}}}|\nabla R(z,\check{\mathbb{D}}| = \infty.$$

Этот пример показывает, что прямые аналоги теорем Кёбе, Бибербаха и Крауса-Нехари неверны для круга с выколотым центром. Но некоторые аналоги этих теорем для неодносвязных областей можно получить на следующем пути.

Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа, и пусть $z_0 \in \Omega$ – фиксированная точка, $z_0 \neq \infty$. Рассмотрим универсальное накрывающее конформное отображение $f : \mathbb{D} \to \Omega$, нормированное условиями $f(0) = z_0$, $f'(0) > 0$. В любой односвязной области $\Omega' \subset \Omega$, $z_0 \in \Omega'$, определена однозначная ветвь $F = f^{-1}$ обратной функции f^{-1}, выделяемая условием $F(z_0) = 0$. Функция F осуществляет однолистное конформное отображение области Ω' на некоторую область $\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}$. Полагая

$$\Omega' = \{z : |z - z_0| < r_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)\}$$

и $g(w) = F(z_0 + r_0 w)$, получаем однолистное конформное отображение $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ с разложением в ряд Тейлора вида

$$g(w) = \frac{r_0}{f'(0)}w + \frac{f''(0)r_0^2}{2f'^2(0)}w^2 + ..., \quad |w| < 1.$$

Поскольку $f'(0) = R(z_0, \Omega)$, $|f''(0)/f'(0)| = |\nabla R(z_0, \Omega)|$ и справедлива оценка $|g''(0)/g'(0)| \leq 4$ по теореме Бибербаха, то приходим к неравенству $|\nabla R(z_0, \Omega)|/R(z_0, \Omega) \leq 4/\mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Применяя более тонкие оценки В. Йоргенсена [91], Б. Осгуд [100] (см. также [64], гл. 3) доказал, что в приведенной оценке для $|\nabla R(z_0, \Omega)|$ постоянную 4 можно заменить на 2. А именно, имеет место

Теорема 2.6 ([100]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического* *типа. Тогда в любой точке $z \in \Omega$ справедлива оценка*

$$|\nabla R(z,\Omega)| \leq \frac{2R(z,\Omega)}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}.$$

2.2 Изопериметрические неравенства

Классическое неравенство Брунна-Минковкого относилось к геометрии выпуклых тел. Впоследствии выяснилось, что оно справедливо и для конечномерных невыпуклых компактов. Речь идет о сравнении мер Лебега трех компактов, точнее, двух компактов и их суммы по Минковскому. В этом пункте мы приведем неравенство типа Бруннна-Минковского для следующих конформных моментов областей

$$\iint_\Omega R^k(z,\Omega)dxdy.$$

Укажем несколько предшествующих результатов, по аналогии с которыми построено наше утверждение. Хадвигер [86] (1956 г.) доказал, что неравенства типа Брунна-Минковского справедливы для моментов инерции областей относительно центра масс и моментов инерции областей относительно гиперплоскости, проходящей через центр масс. В 2007 году Кэди [93] обосновал неравенство типа Брунна-Минковского для граничных моментов области, введенных нами. Отметим также следующую функциональную версию неравенства Брунна-Минковского, доказанную специалистами по теории вероятностей, а именно, Прекопой [106] (1971 г.) и Лайндлером [95] (1972 г.).

Теорема 2.7 ([95], [106]). *Предположим, что $0 < t < 1$ и φ_0, φ_1, h – неотрицательные интегрируемые функции в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Если для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h((1-t)x + ty) \geq \varphi_0(x)^{1-t}\varphi_1(y)^t, \tag{2.2}$$

то

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)dx \right)^{1-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)dx \right)^{t}. \qquad (2.3)$$

Следующая теорема для $k > 0$ доказана автором и Б. С. Тимергалиевым [16].

Теорема 2.8 *Пусть* Ω_0 *и* Ω_1 *– ограниченные области произвольной связности на плоскости* $\mathbb{C}$,

$$\Omega_0 + \Omega_1 = \{z_0 + z_1 : \ z_0 \in \Omega_0, \ z_1 \in \Omega_1\}$$

– сумма Минковского, и пусть k *– неотрицательная постоянная. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\left(\iint_{\Omega} R^k(z,\Omega)dxdy\right)^{1/(2+k)} \geq \left(\iint_{\Omega_0} R^k(z,\Omega_0)dxdy\right)^{1/(2+k)} +$$

$$+\left(\iint_{\Omega_1} R^k(z,\Omega_1)dxdy\right)^{1/(2+k)}, \quad \textit{где} \quad z = x + iy.$$

Доказательство теоремы 2.8. Пусть H_k – функционал на множестве ограниченных областей, определенный равенством

$$H_k^{2+k}(\Omega) := \iint_{\Omega} R^k(z,\Omega)dxdy.$$

Тогда доказываемое неравенство типа Брунна-Минковского можно записать следующим образом: $H_k(\Omega_0+\Omega_1) \geq H_k(\Omega_0) + H_k(\Omega_1)$. Очевидно, при $k = 0$ утверждение теоремы 2.8 сводится к классическому неравенству Брунна-Минковского для плоских ограниченных областей. Поэтому будем считать, что $k > 0$. Пусть $\Omega_t := \{(1-t)w_0 + tw_1 : \ w_0 \in \Omega_0, w_1 \in \Omega_1\}$. Возьмем фиксированные точки $z_0 \in \Omega_0$, $z_1 \in \Omega_1$, $z_t = (1-t)z_0 + tz_1 \in \Omega_t$, $t \in [0,1]$.

По теореме Римана-Пуанкаре существуют и определяются единственным образом универсальные накрывающие конформные отображения f_0, f_1 и f_t единичного круга $\mathbb{D}$ на области Ω_0, Ω_1 и Ω_t соответственно, нормированные условиями: $f_\tau(0) = z_\tau$ и $f'_\tau(0) = \Re f'_\tau(0) > 0$, где $\tau = 0, 1$ и t. Согласно определению гиперболической метрики имеем равенства:

$$1/\lambda_{\Omega_0}(z_0) = f'_0(0), \quad 1/\lambda_{\Omega_1}(z_1) = f'_1(0), \quad 1/\lambda_{\Omega_t}(z_t) = f'_t(0).$$

Рассмотрим теперь голоморфную функцию g_t, определенную равенством

$$g_t(\zeta) := (1-t)f_0(\zeta) + tf_1(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D}$$

Очевидно, $g_t(\zeta) \in \Omega_t$ при любом $\zeta \in \mathbb{D}$. По принципу гиперболической метрики имеем точную оценку $|g'_t(0)| \leq |f'_t(0)|$. Следовательно, $0 < g'_t(0) = (1-t)f'_0(0) + tf'_1(0) \leq f'_t(0)$. Таким образом, для любых точек $z_0 \in \Omega_0, \quad z_1 \in \Omega_1, \quad z_t = (1-t)z_0 + tz_1$ справедливо неравенство

$$\lambda^{-1}_{\Omega_t}(z_t) \geq (1-t)\lambda^{-1}_{\Omega_0}(z_0) + t\lambda^{-1}_{\Omega_1}(z_1). \tag{2.4}$$

Далее мы следуем схеме доказательства Кэди [93]. Оценивая снизу правую часть (2.4) на основании известного неравенства о средних и возведя получаемое неравенство в степень k, имеем:

$$\lambda^{-k}_{\Omega_t}(z_t) \geq \lambda^{-k(1-t)}_{\Omega_0}(z_0)\, \lambda^{-kt}_{\Omega_1}(z_1). \tag{2.5}$$

Будем считать, что $\lambda^{-1}_{\Omega}(z) = 0$ для любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Пусть χ_Ω – характеристическая функция области Ω. Имеем: $\chi_{\Omega_t}((1-t)z + tw) \geq \chi_{\Omega_0}(z)^{1-t}\chi_{\Omega_1}(w)^t$. Определим непрерывные на всей плоскости функции h, φ_0, φ_1 равенствами:

$$h((1-t)z + tw) = \lambda^{-k}_{\Omega_t}((1-t)z + tw)\chi_{\Omega_t}((1-t)z + tw),$$

$$\varphi_0(z)=\lambda_{\Omega_0}^{-k}(z)\chi_{\Omega_0}(z),\quad \varphi_1(w)=\lambda_{\Omega_1}^{-k}(w)\chi_{\Omega_1}(w).$$

Тогда условие (2.2) теоремы 2.7 следует из (2.5). На основании неравенства Прекоры-Лайндлера (2.3) получаем:

$$H_k(\Omega_t)\geq H_k^{1-t}(\Omega_0)H_k^t(\Omega_1)$$

для любого $t\in[0,1]$. Отсюда следует свойство квазивогнутости:

$$H_k(\Omega_t)\geq \min\left\{H_k(\Omega_0),\ H_k(\Omega_1)\right\},\qquad t\in[0,1]. \tag{2.6}$$

Пользуясь определением гиперболической метрики нетрудно доказать, что H_k – функционал, однородный степени 1, т. е.

$$H_k(s\Omega)=sH_k(\Omega)$$

для любого числа $s>0$, где $s\,\Omega:=\{sz:\ z\in\Omega\}$. Как показано в статье [94], свойство однородности и (2.6) влекут неравенство $H_k(\Omega_t)\geq(1-t)H_k(\Omega_0)+t\,H_k(\Omega_1)$ для любого $t\in[0,1]$. Полагая $t=1/2$ в этом неравенстве и снова пользуясь свойством однородности, получаем утверждение теоремы 2.8.

Приведем сейчас несколько интегральных соотношений, аналогичных соотношениям для конформного радиуса (см. главу 1). Через $S(\Omega)$ будем обозначать евклидову площадь области Ω.

Теорема 2.9 ([3]). *Пусть Ω – область гиперболического типа произвольной связности, $\infty\notin\Omega$. Тогда для гиперболического радиуса $R=R(z,\Omega)$ справедливы неравенства*

$$S(\Omega)\geq\frac{1}{2}\iint_\Omega|\nabla R|^2dx\,dy, \tag{2.7}$$

$$\iint_\Omega R^2dx\,dy\geq\iint_\Omega R^2|\nabla R|^2dx\,dy \tag{2.8}$$

при условии конечности их левых частей.

Если область Ω является конечносвязной и ограничена кусочно-гладкими кривыми, то получаем равенства:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\iint_\Omega |\nabla R|^2 dx\,dy, \quad \iint_\Omega R^2 dx\,dy = \iint_\Omega R^2|\nabla R|^2 dx\,dy.$$

Теорема 2.10 ([3]). *Если Ω – ограниченная конечносвязная область гиперболического типа, $\partial\Omega$ – кусочно-гладкие кривые, то*

$$8\pi \iint_\Omega |\nabla R|^2 dx\,dy \leq \left(\iint_\Omega |\Delta R| dx\,dy\right)^2, \tag{2.9}$$

причем знак равенства в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда Ω – круг.

Доказательство теорем 2.9 и 2.10. Неравенства (2.7) и (2.8) вытекают из следующей леммы и теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Лемма 2.1 *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ – конечносвязная область, граница которой состоит из конечного числа кривых Ляпунова, $l(\partial\Omega)$ – сумма длин граничных кривых, $S(\Omega)$ – площадь Ω.*

Если $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция, то справедливы следующие формулы для гиперболического радиуса $R = R(z, \Omega)$:

$$2\varphi(0)l(\partial\Omega) + 4\iint_\Omega \varphi'(R)\,dx\,dy = -\iint_\Omega (R\varphi(R))'\Delta R\,dx\,dy, \tag{2.10}$$

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\iint_\Omega |\nabla R|^2 dx\,dy, \tag{2.11}$$

$$l(\partial\Omega) = -\frac{1}{2}\iint_\Omega \Delta R\,dx\,dy, \tag{2.12}$$

$$\iint_\Omega R^2\,dx\,dy = \iint_\Omega R^2|\nabla R|^2 dx\,dy. \tag{2.13}$$

Доказательство леммы. Применим формулу Грина

$$\iint_\Omega \Delta\psi \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial n}|dz|$$

к функции $\psi(x,y) := \int_0^R \varphi(t)\,dt$, где $R = R(z,\Omega)$, $z = x+iy$, n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Получаем

$$\iint_\Omega \{\varphi(R)\Delta R + \varphi'(R)|\nabla R|^2\} dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \varphi(R)\frac{\partial R}{\partial n}|dz|.$$

Отсюда с учетом уравнения Лиувилля следует (2.10), если мы покажем, что

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(R)\frac{\partial R}{\partial n}|dz| = -\varphi(0)l(\partial\Omega). \tag{2.14}$$

Выведем (2.14). Дифференцирование формулы для R дает тождество

$$\frac{\partial R(z,\Omega)}{\partial z} = \frac{|f'(\zeta)|}{f'(\zeta)}\left(-\overline{\zeta} + \frac{1-|\zeta|^2}{2}\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right), \quad z = f(\zeta). \tag{2.15}$$

Любая граничная компонента $\partial\Omega$ является локально взаимно однозначным образом некоторой дуги β окружности $|\zeta| = 1$ при отображении $f\ : \mathbb{D} \to \Omega$. Так как $\partial\Omega$ – кривые Ляпунова, то

$$(1-|\zeta|^2)f''(\zeta)/f'(\zeta) \to 0 \qquad \text{при} \quad \zeta \to t \in \beta$$

по локальной версии известных теорем Келлога и Харди-Литтлвуда. Следовательно, имеем $|\partial R/\partial z| \equiv 1$ при $\zeta \in \partial\Omega$ в силу (2.15). Но $R(z,\Omega) \equiv 0$ для $z \in \partial\Omega$ и $R(z,\Omega) > 0$ для $z \in \Omega$, поэтому

$$\partial R/\partial n \equiv -2 \qquad \text{при} \quad z \in \partial\Omega,$$

что и доказывает формулу (2.14), следовательно, и равенство (2.10). Формулы (2.11), (2.12), (2.13) получаются теперь из (2.10) при $\varphi(R) \equiv R$, $\varphi(R) \equiv R^3$ и $\varphi(R) \equiv 1$ соответственно.

Лемма 2.1 доказана.

Утверждение теоремы 2.10 следует из изопериметрического неравенства, неравенства (2.7) и формулы (2.12) леммы 2.1, согласно которой $l(\partial\Omega) = (-1/2)\iint \Delta R dx\, dy$. Этим и завершается доказательство теорем 2.9 и 2.10.

Пример 2.1 *Пусть* $\check{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ *– единичный круг с выколотым центром. Поскольку* $R(z, \check{\mathbb{D}}) = 2\,|z|\,\ln(1/|z|)$, *то* $|\nabla R(z, \check{\mathbb{D}})| = 2\,|1 + \ln|z||$. *Вычисления дают, что*

$$\iint_{\check{\mathbb{D}}} |\nabla R(z, \check{\mathbb{D}})|^2 dxdy = 2\pi,$$

следовательно, имеет место формула

$$S(\check{\mathbb{D}}) = \frac{1}{2}\iint_{\check{\mathbb{D}}} |\nabla R(z, \check{\mathbb{D}})|^2 dxdy = \pi,$$

доказанная выше лишь для односвязных областей и конечносвязных областей с кусочно-гладкими границами.

В заключение приведем одно новое изопериметрическое неравенство, которое является простым следствием теоремы сравнения 2.1 и теоремы 1.10.

Теорема 2.11 *Пусть* $1 < \alpha \leq 2$ *и* $1 < \beta \leq 2$. *Пусть* $\Omega \setminus K$ *– область, где* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *– односвязная область,* $K \subset \Omega$ *– компакт лебеговой меры нуль.*

Тогда гиперболический радиус $R(., \Omega \setminus K)$ *области* $\Omega \setminus K$ *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\pi(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}\iint_{\Omega\setminus K} R^{\alpha+\beta-2}(z, \Omega \setminus K) dxdy \leq$$

$$\leq \iint_{\Omega\setminus K} R^{\alpha-2}(z,\Omega\setminus K)dxdy \iint_{\Omega\setminus K} R^{\beta-2}(z,\Omega\setminus K)dxdy.$$

Доказательство теоремы. Поскольку $mes_2 K = 0$, то на основании теоремы 1.10 имеем неравенство

$$\frac{\pi(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \iint_{\Omega\setminus K} R^{\alpha+\beta-2}(z,\Omega)dxdy \leq$$

$$\leq \iint_{\Omega\setminus K} R^{\alpha-2}(z,\Omega)dxdy \iint_{\Omega\setminus K} R^{\beta-2}(z,\Omega)dxdy.$$

Это неравенство влечет наше неравенство, так как $\alpha+\beta-2>0$, $\alpha-2\leq 0$, $\beta-2\leq 0$ и $R(z,\Omega)\geq R(z,\Omega\setminus K)$ в любой точке $z\in\Omega\setminus K$ по теореме сравнения 2.1, следовательно, справедливы оценки

$$\iint_{\Omega\setminus K} R^{\alpha+\beta-2}(z,\Omega\setminus K)dxdy \leq \iint_{\Omega\setminus K} R^{\alpha+\beta-2}(z,\Omega)dxdy,$$

$$\iint_{\Omega\setminus K} R^{\alpha-2}(z,\Omega)dxdy \leq \iint_{\Omega} R^{\alpha-2}(z,\Omega\setminus K)dxdy.$$

$$\iint_{\Omega\setminus K} R^{\beta-2}(z,\Omega)dxdy \leq \iint_{\Omega} R^{\beta-2}(z,\Omega\setminus K)dxdy.$$

2.3 Равномерно совершенные границы

Области с равномерно совершенными границами возникают в критериях положительности констант в некоторых двумерных неравенствах типа Харди и Реллиха. Поэтому нужны характеристики таких областей. Естественно, в геометрической теории функций и ее приложениях используются различные числовые характеристики областей. Некоторые из них просты, но большинство характеристик сложны и связаны со специальными разделами теории меры и с описанием весьма тонких метрических свойств области и ее границы.

Ряд простых характеристик области связан с изопериметрическими неравенствами и краевыми задачами математической физики. Здесь мы продолжим этот ряд. Основная цель заключается в следующем: описать те простые величины, с помощью которых можно охарактеризовать области с равномерно совершенными границами.

Понятие равномерно совершенного множества и понятие области с равномерно совершенной границей стали употребляться сравнительно недавно. Поэтому в литературе существуют различные трактовки и различные определения.

Мы будем придерживаться терминов, восходящих к Х. Поммеренке [104] и использованных в монографии автора и К.-Й. Вирца [64] (см. также статьи [90], [115], [116]).

Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа. Определим сначала евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ этой области. Для этого нам потребуется множество $\mathbb{A}nn(\Omega)$, элементами которого являются круговые концентрические кольца вида

$$A = A(z_A; r_A, R_A) := \{z \in \mathbb{C} : r_A < |z - z_A| < R_A\},$$

обладающие свойствами:

1) $0 < r_A < R_A < \infty, \quad A(z_A; r_A, R_A) \subset \Omega;$

2) $z_A \in \partial\Omega;$

3) $A(z_A; r_A, R_A)$ разделяет границу области Ω, т. е. и круг $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_A| \le r_A\}$ и внешность круга $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - z_A| \ge R_A\}$ содержат граничные точки области Ω.

Определение 2.1 *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа, и пусть $\mathbb{A}nn(\Omega)$ – определенное выше множество колец.*

1) Если $\mathbb{A}nn(\Omega) = \emptyset$, то считаем, что $M_0(\Omega) = 0$.

2) Если $\mathbb{A}nn(\Omega)$ – непустое множество, то полагаем

$$M_0(\Omega) := \sup_{A \in \mathbb{A}nn(\Omega)} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_A}{r_A},$$

где $A = A(z_A; r_A,\, R_A)$.

Определение 2.2 *Если $M_0(\Omega) < \infty$, то будем говорить, что граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является равномерно совершенной.*

Евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ является для нас важной характеристикой области. Он оказался полезным при явных оценках констант в двумерных неравенствах типа Харди и Реллиха. К тому же модуль $M_0(\Omega)$ вычисляется сравнительно просто, не требует знания конформных характеристик области, хотя и связан с ними.

Перечислим несколько свойств $M_0(\Omega)$, которые можно рассматривать как простые следствия определения.

1) Если область гиперболического типа является односвязной, то разделяющие ее границу кольца отсутствуют, поэтому евклидов максимальный модуль равен нулю. Семейство областей $\wp_0 := \{\Omega : M_0(\Omega) = 0\}$ является богатой коллекцией областей, причем оно содержит области произвольной связности.

Пример 2.2 *Пусть Ω_0 – некоторая полоса ширины 2. Очевидно, существует компакт $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, где C_m являются континуумами (связными компактами), причем $\operatorname{diam} C_m \geq 2$, $K \subset \Omega_0$ и $\Omega_0 \setminus \overline{K}$ – область. Тогда имеем равенство $M_0(\Omega_0 \setminus \overline{K}) = 0$.*

2) Если область не является односвязной, но имеет лишь конечное число граничных компонент, то такую область будем называть конечносвязной. Если область является конечносвязной, то понятия совершенности и равномерной совершенности границы

области совпадают и сводятся к тому, что отсутствуют изолированные граничные точки. Но сама величина $M_0(\Omega)$ остается важной характеристикой даже для двусвязных областей.

3) Наиболее существенна роль евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$ для бесконечносвязных областей. К тому же в этом случае равномерная совершенность границы значительно отличается от совершенности. Можно указать топологически эквивалентные области Ω и Π такие, что $M_0(\Omega) = \infty$, но $M_0(\Pi) < \infty$.

Приведем несколько простых примеров, в них использован круг $B(0,3) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$ радиуса 3, из которого удален некоторый компакт.

Пример 2.3 *Предположим, что* $E_1 = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \bigcup \{0\}$, *где*

$$K_m = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0,\ m^{-m} \leq x \leq 2m^{-m}\}.$$

Граница области $\Omega = B(0,3) \backslash E_1$ *является совершенным множеством, но* $M_0(\Omega) = \infty$, *так как сама область содержит разделяющие границу* Ω *кольца* $\{z \in \mathbb{C} : 2(m+1)^{-m-1} < |z| < m^{-m}\}$.

Пример 2.4 *Пусть* $\Pi = B(0,3) \backslash E_2$, *где* $E_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_{2m-1} \bigcup \{0\}$, $L_{2m-1} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = 0,\ 3^{-2m+1} \leq x \leq 3^{-2m+2}\}$. *Для любого кольца* A *в* Π *с центром на* $\partial\Pi$ *имеем* $R_A/r_A \leq 3$. *Нетрудно показать, что* $M_0(\Pi) = (2\pi)^{-1} \ln\ 3$. *Обратим внимание на то, что* Π *отличается от области* Ω *из примера* 2.3 *лишь выбором длин удаляемых отрезков.*

Пример 2.5 *Пусть* $\Pi = B(0,3) \backslash K$, *где* $K \subset [0,1]$ *– классическое канторово множество. Тогда* $M_0(\Pi) = (2\pi)^{-1} \ln\ 3$.

Формально более простым, чем определение $M_0(\Omega)$, является определение конформного максимального модуля $M(\Omega)$.

Определение 2.3 *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *– область гиперболического типа.*

1) Если Ω – односвязная область, то $M(\Omega) = 0$.

2) Если Ω – двусвязная область, то $M(\Omega)$ – конформный модуль этой области.

3) Если Ω – неодносвязная область, то полагают

$$M(\Omega) := \sup M(\Omega_2),$$

где супремум берется по всем таким двусвязным областям Ω_2, что $\Omega_2 \subset \Omega$ и Ω_2 разделяет границу области Ω.

Для двусвязных областей мы намеренно определили максимальный модуль дважды, что не приводит к противоречию.

В литературе можно найти также равномерно совершенные множества E, не обязательно являющиеся границами области. По определению, равномерно совершенное множество $E \neq \overline{\mathbb{C}}$ является компактом, содержащим не менее двух точек и таким, что равномерно ограничены модули разделяющих E двусвязных областей, лежащих в открытом множестве $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ (см., например, монографию Л. Карлесона и Т. У. Гамелина [76], с. 63–64, статьи П. Йарви и М. Вуоринена [90], Т. Сугавы [115], [116] и автора [8]).

Вернемся к характеристикам $M_0(\Omega)$ и $M(\Omega)$.

Очевидно, конформный максимальный модуль $M(\Omega)$ вычисляется или оценивается намного сложнее, чем евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$. Но конформный максимальный модуль $M(\Omega)$ обладает весьма важным и полезным свойством, а именно, свойством конформной инвариантности. Напротив, евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ является простой, элементарной характеристикой области, но не является конформно инвариантной величиной. Обстоятельством, позволяющим сочетать практически полезные свойства максимальных модулей $M_0(\Omega)$ и $M(\Omega)$, является следующая, неожиданно простая связь между этими двумя модулями.

Теорема 2.12 *Для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа*

$$M_0(\Omega) \leq M(\Omega) \leq M_0(\Omega) + 1/2. \tag{2.16}$$

Очевидно, левая оценка $M_0(\Omega) \leq M(\Omega)$ вытекает непосредственно из определений максимальных модулей. Правая оценка в такой простой форме получена автором и К.-Й. Вирцом [64] как следствие соответствующих результатов Тейхмюллера и Альфорса, изложенных в монографии [47].

Евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ оказывается почти конформно инвариантным в следующем смысле.

Следствие 2.12.1 *Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $\Pi \subset \mathbb{C}$ – конформно эквивалентные области гиперболического типа, то*

$$|M_0(\Omega) - M_0(\Pi)| \leq 1/2.$$

Действительно, с учетом равенства $M(\Omega) = M(\Pi)$ получаем, что $M_0(\Omega) \leq M(\Omega) = M(\Pi) \leq M_0(\Pi) + 1/2$. Следовательно, имеем неравенство $M_0(\Omega) - M_0(\Pi) \leq 1/2$. Меняя местами Ω и Π, получаем $M_0(\Pi) - M_0(\Omega) \leq 1/2$, что и требовалось.

Для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа рассмотрим еще ряд новых числовых параметров, определенных формулами

$$\alpha(\Omega) := \inf_{z \in \Omega} \frac{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}{R(z, \Omega)}, \tag{2.17}$$

$$\gamma(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} |\nabla R(z, \Omega)|, \ \ \beta(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} \sqrt{\frac{R^3(z, \Omega)}{16} \, \Delta^2 R(z, \Omega)}. \tag{2.18}$$

Напомним, что для односвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа $M_0(\Omega) = 0$ по определению, $\gamma(\Omega) \leq 4$ по геометрической версии теоремы Бибербаха и $\alpha(\Omega) \geq 1/4$ по теореме Кёбе об одной четвертой. Согласно результатам Поммеренке [104] и неравенствам Бирдона и Поммеренке [71], имеем: если $\Omega \subset \mathbb{C}$, то

$$\alpha(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow M_0(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow \gamma(\Omega) < \infty. \tag{2.19}$$

Во избежание недоразумений подчеркнем, что условие $\Omega \subset \mathbb{C}$ на область при определениях (2.17) и (2.18) не является случайным. Если Ω – область гиперболического типа на расширенной плоскости и $\infty \in \Omega$, то $\alpha(\Omega) = 0$ и $\gamma(\Omega) = \infty$, поэтому определения (2.17) и (2.18) теряют смысл, а утверждение (2.19) является неверным. Например, если двусвязная область Ω является внешностью двух, не пересекающихся между собой замкнутых кругов, то для нее $M_0(\Omega) < \infty$, но $\alpha(\Omega) = 0$ и $\gamma(\Omega) = \infty$.

Для областей $\Omega \subset \mathbb{C}$ (и только для них) справедливо следующее утверждение, восходящее к Бирдону и Поммеренке [71].

Теорема 2.13 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область гиперболического типа. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\alpha(\Omega)} \leq 2\pi M_0(\Omega) + \frac{(\Gamma(1/4))^4}{2\pi^2}. \tag{2.20}$$

В этой форме неравенство (2.20) можно найти в работе автора и Вирца [64]. Оно является уточненной формулировкой оценок из упомянутой статьи [71].

Пусть a и b – фиксированные комплексные числа, $a \neq 0$, и пусть $a\Omega + b := \{az + b : z \in \Omega\}$. Поскольку

$$R(az + b, a\Omega + b) \equiv |a|\, R(z, \Omega)$$

и

$$\operatorname{dist}(az + b, \partial(a\Omega + b)) \equiv |a| \operatorname{dist}(z, \partial\Omega),$$

то имеем

$$\alpha(\Omega) = \alpha(a\Omega + b), \quad \beta(\Omega) = \beta(a\Omega + b), \quad \gamma(\Omega) = \gamma(a\Omega + b)$$

и $M_0(\Omega) = M_0(a\Omega + b)$, т. е. эти константы инвариантны по отношению к линейным конформным преобразованиям областей.

Через f будем обозначать универсальное накрывающее конформное отображение круга $\mathbb{D} = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область гиперболического типа $\Omega \subset \mathbb{C}$. Нам снова потребуется шварциан

$$S_f(\zeta) = \frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Напомним, что имеет место тождество

$$\frac{R^3(z,\Omega)}{4}\,\Delta^2 R(z,\Omega) = (1-|\zeta|^2)^4\,|S_f(\zeta)|^2,\; z = f(\zeta) \in \Omega. \quad (2.21)$$

Предложение 2.1 ([55]). *Справедливо равенство*

$$\beta(\Omega) = \frac{1}{2}\sup_{\zeta\in D}(1-|\zeta|^2)^2\,|S_f(\zeta)|\,. \quad (2.22)$$

Кроме того, для кругового кольца

$$A = A(z_A; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_A| < r_2\}$$

с конформным модулем $M = M(A) = (2\pi)^{-1}\ln(r_2/r_1)$ имеет место равенство

$$\beta(A) = 4M^2 + 1. \quad (2.23)$$

Доказательство. В силу инвариантности $\beta(A)$ по отношению к линейным конформным отображениям области A достаточно рассмотреть кольцо $A_q := A(0; q, 1)$ с модулем

$$M = M(A_q) = (2\pi)^{-1}\ln(1/q),$$

где $0 < q < 1$. Пользуясь формулой

$$R = R(re^{i\theta}, A_q) = 4Mr\sin t,$$

где $t = (2M)^{-1}\ln(1/r)$, легко вычисляем

$$\Delta^2 R = (R'' + R'/r)'' + (R'' + R'/r)'/r = \frac{(4M^2+1)^2}{4M^3}\frac{\sin t}{r^3}.$$

Следовательно,

$$\beta(A_q) := \sup_{z\in A_q}\sqrt{\frac{R^3(z,A_q)}{16}\,\Delta^2 R(z,A_q)} =$$

$$= (4M^2+1)\sup_{t\in(0,\pi)}\sin^2 t = 4M^2+1,$$

этим и завершается доказательство (2.23).

В [64] доказано, что $4M^2(A_q)+1 = \gamma^2(A_q)/4$. Это равенство вместе с формулой (2.23) влечет

Следствие 2.13.1 *Для любого кольца A с конечным модулем $M(A) = M$ имеют место равенства $\gamma^2(A)/4 = \beta(A) = 4M^2+1$.*

Константа $\beta(\Omega)$ в форме (2.22) введена Р. Гармелиным [87] и исследована У. Ма и Д. Миндой [97]. Они указывают, что для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа справедливы соотношения

$$\gamma^2(\Omega) - 4 \le 4\beta(\Omega) \le \gamma^2(\Omega) + 4. \tag{2.24}$$

Левое неравенство в (2.24) следует из результатов Х. Поммеренке [102], а правое неравенство доказано Р. Гармелиным [87].

Пользуясь (2.19), (2.21) и (2.24), мы получаем следующее утверждение, принадлежащее автору [55].

Предложение 2.2 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область гиперболического типа. Тогда* $\sup_{z\in\Omega} R^3(z,\Omega)\,\Delta^2 R(z,\Omega) < \infty \Longleftrightarrow M_0(\Omega) < \infty$.

В [64] доказано, что для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа

$$\frac{M_0(\Omega)}{1 - e^{-\pi M_0(\Omega)}} \le \frac{1}{4\,\alpha(\Omega)} \le \frac{\gamma(\Omega)}{4}. \tag{2.25}$$

В силу (2.25) естественно искать такие постоянные k_0 и k, что

$$1/\alpha(\Omega) \le k_0\, M_0(\Omega) + k. \tag{2.26}$$

Ниже нам потребуются неравенства (2.16) и следующая

Теорема 2.14 (У. Ма, Д. Минда [97]). *Предположим, что* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и* $\Pi \subset \mathbb{C}$ *– конформно эквивалентные области гиперболического типа. Тогда*

$$|\beta(\Omega) - \beta(\Pi)| \le 6, \qquad |\gamma(\Omega) - \gamma(\Pi)| \le 2. \tag{2.27}$$

Следующее утверждение доказано нами в [55]. Речь идет неравенствах вида (2.26) для $1/\alpha(\Omega)$, $\gamma(\Omega)$ и $2\sqrt{\beta(\Omega)}$ с точной константой $k_0 = 4$.

Теорема 2.15 *Для любой двусвязной области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *с конечным конформным модулем имеют место неравенства*

$$\frac{1}{4\,\alpha(\Omega)} \le \frac{\gamma(\Omega)}{4} \le M_0(\Omega) + \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \tag{2.28}$$

$$\frac{\sqrt{\beta(\Omega)}}{2} \le M_0(\Omega) + \sqrt{2}.$$

Эти оценки асимптотически точны при $M(\Omega) \to \infty$ *в следующем смысле: для любой последовательности двусвязных областей* $\Omega_n \subset \mathbb{C}$ *с конечными модулями* $M(\Omega_n)$*, такими, что* $M(\Omega_n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$*, справедливы равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha(\Omega_n) M_0(\Omega_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma(\Omega_n)}{M_0(\Omega_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta(\Omega_n)}{M_0^2(\Omega_n)} = 4. \tag{2.29}$$

Доказательство теоремы 2.15. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – двусвязная область с конформным модулем

$$M(\Omega) = M(A_q) = (2\pi)^{-1}\ln(1/q),$$

где $q \in (0,1)$ и $A_q = A(0;q,1)$. Пользуясь элементарными неравенствами, равенством (2.23) для $A = A_q$, неравенствами (2.16) и (2.27) для Ω и $\Pi = A_q$, получаем, что

$$\beta(\Omega) \le |\beta(\Omega) - \beta(A_q)| + \beta(A_q) \le 7 + 4\,M^2(A_q) \le$$

$$\le 7 + 4\,(M_0(\Omega) + 1/2)^2 \le 4\left(M_0(\Omega) + \sqrt{2}\right)^2,$$

а также

$$\gamma(\Omega) \le 2 + \gamma(A_q) = 2 + \sqrt{4 + 16M^2(A_q)} \le$$

$$\le 2 + \sqrt{4 + 16(M_0(\Omega) + 1/2)^2} \le 4M_0(\Omega) + 2 + 2\sqrt{2}.$$

Очевидно, эти неравенства вместе с неравенством $1/\alpha(\Omega) \le \gamma(\Omega)$ из (2.25) влекут все неравенства (2.28). Рассмотрим теперь последовательность двусвязных областей $\Omega_n \subset \mathbb{C}$ с конечными модулями и таких, что $M(\Omega_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. В силу неравенств (2.16) получаем, что $\lim_{n\to\infty} M_0(\Omega_n) = \infty$. С одной стороны,

$$\frac{1}{\alpha(\Omega_n)} \le \gamma(\Omega_n) \le 4M_0(\Omega_n) + 2 + 2\sqrt{2},$$

$$2\sqrt{\beta(\Omega_n)} \le 4M_0(\Omega_n) + 4\sqrt{2},$$

согласно (2.28). С другой стороны, из соотношений (2.24) (2.25) следует, что

$$4M_0(\Omega_n) \le \frac{1}{\alpha(\Omega_n)} \le \gamma(\Omega_n) \le 2\sqrt{\beta(\Omega_n) + 1}.$$

По теореме о зажатой последовательности имеем (2.29). Итак, предложение 2.15 доказано.

Приведем примеры двусвязных областей Ω, для которых легко найти $M_0(\Omega)$, но сложно вычислить точные значения числовых характеристик $M(\Omega)$, $\alpha(\Omega)$, $\beta(\Omega)$ и $\gamma(\Omega)$.

Пример 2.6 *Пусть K – классическое канторово множество, лежащее на отрезке $[0,1] = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1,\, y = 0\}$. Рассмотрим компакт*

$$K_1 = [0,1] \bigcup \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : x \in K,\ 2\,|y| \leq \sqrt{x(1-x)} \right\}$$

и следующее семейство двусвязных областей:

$$\Omega_1(t) = \{x + iy \in \mathbb{C} : -\infty < x < \infty,\ y < t\} \setminus K_1,$$

где $t \in (1/4, \infty)$.

Если $t \in (1/4, 1/2]$, то не существует окружности, лежащей в области $\Omega_1(t)$, имеющей центр в некоторой точке K_1 и разделяющей $\partial\Omega_1(t)$. Следовательно, $M_0(\Omega_1(t)) = 0$ при любом $t \in (1/4, 1/2]$. Легко показать, что $M_0(\Omega_1(t)) = (2\pi)^{-1}\ln(2t)$ при $t \in (1/2, \infty)$.

Пример 2.7 *Пусть Ω^+ – односвязная область (криволинейная полоса), определенная формулой*

$$\Omega^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : -\infty < x < \infty,\, h_1(x) < y < h_2(x)\},$$

где $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам $0 < h_2(x) - h_1(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Определим $\Omega^- \subset \overline{\mathbb{C}}$ как односвязную область, такую, что $K_2 := (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega^-) \subset \Omega^+$ с диаметром $K_2 \geq 1$.

Тогда область $\Omega_2 := \Omega^+ \cap \Omega^- = \Omega^+ \setminus K_2$ – двусвязная область, *такая, что* $M_0(\Omega_2) = 0$, *так как не существует окружности, лежащей а области* Ω_2 *и разделяющей ее границу.*

2.4 Универсальные неравенства

Различные априорные оценки играют важную роль при исследовании краевых задач математической физики вариационным методом. Речь идет об интегральных неравенствах, справедливых для всех функций, которые принадлежат подходящему функциональному пространству в заданной области евклидова пространства. В монографиях О. А. Ладыженской [30], В. Г. Мазьи [31] и С. Л. Соболева [40], [41] можно найти множество вариационных неравенств, связанных с именами Стеклова, Пуанкаре, Фридрихса, Соболева, Харди и ряда других выдающихся математиков.

Как отмечала неоднократно О. А. Ладыженская, основная работа при исследовании вариационных неравенств заключается в оценках констант, точнее, норм операторов вложения, зависящих от весовых функций и числовых параметров задачи. Существование положительных констант означает ограниченность норм соответствующих операторов вложения, и это требование приводит к "сортировке" областей, т. е. к определению "хороших" областей, для которых соответствующая задача математической физики имеет решение. Известно, что для ряда задач гарантированно "хорошими" являются ограниченные области с локально липшицевыми границами.

Оказывается, существуют неравенства, универсальные в том смысле, что они не зависят существенно от свойств границы области. Такие универсальные неравенства представлены в трех следующих теоремах, доказанных автором в статьях [6], [8], [52]. Как и выше $R = R(z, \Omega)$ обозначает гиперболический радиус области Ω в точке $z = x + iy$. Напомним также, что область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется областью гиперболического типа тогда и только тогда, когда ее граница содержит не менее трех точек.

Теорема 2.16 (см. [6], [8], [52]). *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – *область гиперболического типа. Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|}{\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)}\, dxdy \geq 2 \iint_\Omega \frac{|u(z)|}{R^2(z,\Omega)}\, dxdy \quad (z = x + iy).$$

Теорема 2.17 ([8]). *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – *область гиперболического типа, и пусть* $\sigma \in (0, \infty)$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^2}{R^\sigma(z,\Omega)}\, dxdy \geq 4\sigma \iint_\Omega \frac{u^2(z)}{R^{2+\sigma}(z,\Omega)}\, dxdy \ \ (z = x + iy). \quad (2.30)$$

При $\sigma > 1$ *постоянная* 4σ *является точной для любой ограниченной конечносвязной области* Ω *с гладкой границей.*

Теорема 2.18 (см. [52]). *Пусть* $1 \leq p < \infty$, $2 < s < \infty$, *и пусть* Ω – *открытое собственное подмножество* $\mathbb{C}$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{\operatorname{dist}^{s-p}(z, \partial\Omega)} dx\, dy \geq \left(\frac{s-2}{p}\right)^p \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p}{\operatorname{dist}^s(z, \partial\Omega)} dx\, dy, \quad (2.31)$$

где $z = x + iy$. *Существуют области, для которых постоянная* $((s-2)/p)^p$ *является точной, т. е. не может быть увеличена.*

Доказательства теорем 2.16 и 2.17 будут приведены ниже. Сначала мы представим одно из доказательств базового неравенства (1) из предисловия.

Очевидно, все конформно инвариантные неравенства обладают частичной универсальностью: из справедливости неравенства в одной области Ω следует, что оно имеет место с той же константой в любой другой области Π, конформно эквивалентной области Ω. Это свойство используется в приводимом ниже доказательстве неравенства (1), указанного в предисловии.

Нам потребуется теорема Харди об оценке интеграла с сингулярным ядром $1/t^s$ $(s > 1)$, которую можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.19 *Предположим, что* $1 \le p < \infty$ *и* $1 < s < \infty$, $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *– абсолютно непрерывная неубывающая функция, такая, что* $g(0) = 0$ *и* $g'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int_0^\infty \frac{g(t)^p}{t^s} dt \le \left(\frac{p}{s-1}\right)^p \int_0^\infty \frac{g'(t)^p}{t^{s-p}} dt. \tag{2.32}$$

Для $p > 1$ *и* $g \not\equiv 0$ *неравенство в формуле* (2.32) *является строгим (т. е. не существует экстремальной функции), но постоянная* $(p/(s-1))^p$ *является точной. Если же* $p = 1$, *то неравенство превращается в следующее функциональное тождество*

$$\int_0^\infty \frac{g(t)}{t^s} dt = \frac{1}{s-1} \int_0^\infty \frac{g'(t)}{t^{s-1}} dt,$$

справедливое для всех допустимых функций.

Доказательство этой теоремы можно найти в монографии Харди, Литтлвуда и Пойа [42]. По весовым неравенствам Харди вида (2.32), их обобщениям и приложениям имеется обширная литература, включающая ряд монографий. Читателю можно рекомендовать недавно изданную книгу Д. В. Прохорова, В. Д. Степанова и Е. П. Ушаковой [37].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область гиперболического типа. Обсудим вкратце доказательство Анконы неравенства (1), т. е.

неравенства

$$\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy \geq \iint_\Omega \frac{|u(x,y)|^2}{R^2(z,\Omega)}\,dx\,dy \ \ \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.33)$$

А. Анкона [50] получает (2.33) сначала для полуплоскости

$$H^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$$

как простое следствие неравенства Харди (2.32) следующим образом. Полагая $s = p = 2$ и $g(t) := \int_0^t |u'_\tau(\tau, y)|d\tau \geq |u(t,y)|$ в неравенстве Харди (2.32), имеем

$$\int_0^\infty \frac{|u(t,y)|^2}{t^2}dt \leq 4\int_0^\infty \left|\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}\right|^2 dt \leq 4\int_0^\infty |\nabla u(t,y)|^2\,dt,$$

следовательно,

$$\int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty \frac{|u(x,y)|^2}{4x^2}\,dx \leq \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^\infty |\nabla u(x,y)|^2\,dx.$$

Тем самым, неравенство (2.33) доказано для случая полуплоскости, поскольку $4x^2 = R^2(z, H^+)$. Так как неравенство (2.33) является конформно инвариантным, то оно будет верно и для любой односвязной области гиперболического типа.

Как будет показано ниже, неравенство (2.33) верно и для двусвязных областей гиперболического типа. Но существуют области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа, для которых

$$c_2(\Omega) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega), u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |u(x,y)|^2 R^{-2}(z,\Omega)\,dx\,dy}{\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy} = 0.$$

Одним из примеров является область $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, имеющая три граничных точки, а именно, $\partial\Omega = \{0, 1, \infty\}$. Таким образом, неравенство вида

$$\iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy \geq c_2(\Omega)\iint_\Omega \frac{|u(x,y)|^2}{R^2(z,\Omega)}\,dx\,dy \;\; \forall u\in C_0^\infty(\Omega)$$

не является универсальным на множестве всех областей $\Omega\subset\mathbb{C}$ гиперболического типа.

Тем не менее, существуют некоторые обобщения (2.33), инвариантные относительно линейных конформных преобразований вида $w=az+b$ и универсальные на множестве всех областей $\Omega\subset\mathbb{C}$ гиперболического типа. Нам потребуется следующая лемма, опубликованная нами в статье [8].

Лемма 2.2 *Пусть σ – положительное число, $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ – произвольная область гиперболического типа. Для любой вещественнозначной функции $u\in C_0^1(\Omega)$ имеет место равенство*

$$\iint_\Omega \frac{(\nabla u,\nabla R)}{R^{1+\sigma}}\,dxdy = \iint_\Omega \frac{(4+\sigma|\nabla R|^2)\,u}{R^{2+\sigma}}\,dxdy, \tag{2.34}$$

где $R=R(x+iy,\Omega)$ и $(\nabla u,\nabla R)$ – скалярное произведение.

Доказательство. Пусть u – функция, удовлетворяющая условиям леммы. Предположим сначала, что $\infty\notin\Omega$. Пусть Ω' – конечносвязная область с гладкой границей, причем $\overline{\Omega'}\subset\Omega$ и Ω' содержит носитель функции u. Применим формулу Грина

$$\iint_{\Omega'}(U\Delta V+(\nabla U,\nabla V))dxdy=\int_{\partial\Omega'} U\frac{\partial V}{\partial n}|dz|$$

к паре функций U и V, определяемых в Ω равенствами:

$$U(x,y)=u(x,y)R^{-\sigma}, \qquad V(x,y)=\ln R,$$

где $R=R(z,\Omega)$, $z=x+iy$.

С учетом уравнения Лиувилля в форме $\Delta\ln R=-4R^{-2}$ и обращения в нуль функции U на множестве $\Omega \setminus \Omega'$ будем иметь равенство

$$\iint_\Omega \left(-\frac{4u}{R^{2+\sigma}} + \left(\nabla(uR^{-\sigma}) \,, \nabla \ln R\right) \right) dxdy = 0,$$

что равносильно доказываемому тождеству (2.34).

Предположим теперь, что $\infty \in \Omega$. Тогда формулу Грина применяем в области $\Omega' \setminus \{z : |z| \geq r\}$ для достаточно больших r. В правой части формулы Грина появится дополнительное слагаемое

$$\int_0^{2\pi} \frac{u(r\cos\theta, r\sin\theta)}{R^{1+\sigma}(re^{i\theta}, \Omega)} \; \frac{\partial R(re^{i\theta}, \Omega)}{\partial r} \, r\, d\theta,$$

которое стремится к нулю при $r \to \infty$, и, таким образом, результат не меняется. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.16. Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ и $p > 1$. Тогда $|u|^p \in C_0^1(\Omega)$. Применяя к этой функции тождество (2.34), будем иметь

$$\iint_\Omega \frac{(\nabla |u|^p, \nabla R)}{R^{1+\sigma}} \, dxdy = \iint_\Omega \frac{(4 + \sigma |\nabla R|^2) \, |u|^p}{R^{2+\sigma}} \, dxdy.$$

Следовательно,

$$p \iint_\Omega \frac{|u|^{p-1} \, |\nabla u| \, |\nabla R|}{R^{1+\sigma}} \, dxdy \geq \iint_\Omega \frac{(4 + \sigma |\nabla R|^2) \, |u|^p}{R^{2+\sigma}} \, dxdy.$$

Поскольку функция $u \in C_0^1(\Omega)$ фиксирована и имеет компактный носитель в Ω, то возможен предельный переход при $p \to 1$, $\sigma \to 0$. В результате получим неравенство

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)| \, |\nabla R(z, \Omega)|}{R(z, \Omega)} \, dxdy \geq 4 \iint_\Omega \frac{|u(z)|}{R^2(z, \Omega)} \, dxdy.$$

Отсюда и следует требуемое неравенство теоремы 2.16, так как

$|\nabla R(z,\Omega)| \le 2R(z,\Omega)/\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)$ по теореме Б. Осгуда (см. теорему 2.6 в гл. 2).

Доказательство теоремы 2.17. Запишем тождество (2.34) для функции $u^2 \in C_0^1(\Omega)$, затем воспользуемся элементарными неравенствами

$$|(\nabla u, \nabla R)| \le |\nabla u|\,|\nabla R|, \quad 2ab \le \sigma a^2 + b^2/\sigma,$$

полагая $a = u|\nabla R|/R^{1+\sigma/2}$, $b = |\nabla u|/R^{\sigma/2}$. Будем иметь

$$\iint_\Omega \frac{(4+\sigma|\nabla R|^2)\,u^2}{R^{2+\sigma}}\,dxdy = 2\iint_\Omega \frac{u(\nabla u, \nabla R)}{R^{1+\sigma}}\,dxdy \le$$

$$\le \iint_\Omega \left(\sigma\frac{u^2|\nabla R|^2}{R^{2+\sigma}} + \frac{1}{\sigma}\,\frac{|\nabla u|^2}{R^\sigma}\right)dxdy.$$

В левой и правой частях неравенства имеются одинаковые интегралы, содержащие под интегралом множитель $|\nabla R|^2$. Поэтому получаем следующее неравенство, равносильное (2.30):

$$\iint_\Omega \frac{4\,u^2}{R^{2+\sigma}}\,dxdy \le \iint_\Omega \frac{1}{\sigma}\,\frac{|\nabla u|^2}{R^\sigma}\,dxdy.$$

Докажем теперь утверждение о точности постоянной 4σ. Предположим, что $\sigma \ge 1$, Ω' – ограниченная конечносвязная область, каждая граничная компонента которой является замкнутой гладкой кривой. В силу известных результатов нам достаточно указать вещественнозначную функцию $u_\sigma \in C(\overline{\Omega'}) \cap C^\infty(\Omega')$, обращающуюся в нуль на границе области Ω', обладающую свойством

$$\iint_{\Omega'} \frac{u_\sigma^2}{R^{2+\sigma}}\,dxdy < \infty, \quad \iint_{\Omega'} \frac{|\nabla u_\sigma|^2}{R^\sigma}\,dxdy < \infty$$

и реализующую знак равенства в неравенстве (2.30), т. е.

$$Y_\sigma := \iint_{\Omega'} \frac{|\nabla u_\sigma|^2}{R^\sigma}\, dxdy - 4\sigma \iint_{\Omega'} \frac{u_\sigma^2}{R^{2+\sigma}}\, dxdy = 0.$$

Рассмотрим функцию, определяемую равенством

$$u_\sigma(x,y) = R^\sigma = R^\sigma(x+iy,\Omega).$$

Она удовлетворяет всем предварительным требованиям. Нам остается проверить равенство $Y_\sigma = 0$, пользуясь уравнением Лиувилля и формулой Грина. Имеем

$$Y_\sigma := \iint_{\Omega'} \sigma^2 R^{\sigma-2}|\nabla R|^2\, dxdy - 4\sigma \iint_{\Omega'} R^{\sigma-2}\, dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega'} \sigma^2 R^{\sigma-2}|\nabla R|^2\, dxdy + \sigma \iint_{\Omega'} R^\sigma\, \Delta \ln R dxdy =$$

$$= \sigma \iint_{\Omega'} \left(R^\sigma\, \Delta \ln R + \sigma R^{\sigma-2}|\nabla R|^2\right)\, dxdy =$$

$$= \sigma \int_{\partial\Omega'} R^{\sigma-1}\frac{\partial R}{\partial n}|dz| = -2\sigma \int_{\partial\Omega'} R^{\sigma-1}|dz| = 0.$$

Итак, теорема 2.17, представляющая собой случай $p=2$ последующей теоремы 2.20 при $s = 2+\sigma$, доказана.

Теорема 2.20 ([8]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа, $s \in (2,\infty)$, $p \in [2,\infty)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{s-p}(z,\Omega)} dxdy \geq \frac{4^p(s-2)^{p/2}}{p^p} \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^s(z,\Omega)} dxdy \qquad (2.35)$$

где $z = x+iy$. При $p=2$ и любом $s \in (3,\infty)$ постоянная перед интегралом в правой части является точной для любой ограниченной конечносвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с гладкой границей.

Доказательство теоремы 2.20. При $p=2$ утверждение теоремы совпадает с теоремой 2.17. При $p>2$ мы пользуемся стандартным приемом, основанном на применении неравенства Гёльдера.

Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ и $p>2$. Тогда $|u|^{p/2} \in C_0^1(\Omega)$. Применяя к этой функции неравенство (2.34), затем неравенство Гёльдера с показателями $p'=p/(p-2)$, $q'=p/2$ к произведению функций $|u|^{p-2}|/R^{(2+\sigma)(1-2/p)}$, $|\nabla u|^2/R^{(2+\sigma-p)2/p}$, будем иметь

$$4\sigma \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^{2+\sigma}}\,dxdy \le \frac{p^2}{4}\iint_\Omega \frac{|u|^{p-2}|\nabla u|^2}{R^\sigma}\,dxdy$$

$$\le \frac{p^2}{4}\left(\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^{2+\sigma}}\,dxdy\right)^{1-2/p}\left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2+\sigma-p}}\,dxdy\right)^{2/p}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2+\sigma-p}(z,\Omega)}\,dxdy \ge \left(\frac{16\sigma}{p^2}\right)^{p/2}\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^{2+\sigma}(z,\Omega)}\,dxdy,$$

равносильное доказываемому неравенству (2.35) при $s=2+\sigma$.

Этим и завершается доказательство теоремы 2.20.

Доказательство теоремы 2.18 возникло из попыток автора свести общий случай к простым примерам путем аппроксимации области элементарными множествами, используемыми при определении внутренней меры Жордана. Доказательство получилось прозрачным, но, к сожалению, не коротким (см. статьи [6] и [52]).

В силу неравенства $R(z,\Omega) \ge \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ из теоремы 2.18 получаем

Следствие 2.20.1 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область гиперболического типа. Если $2<s<\infty$ и $s \le p < \infty$, то*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{s-p}(z,\Omega)}dx\,dy \ge \left(\frac{s-2}{p}\right)^p \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p}{R^s(z,\Omega)}dx\,dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

При $p \geq s > 18$ имеем: $(s-2)^p/p^p > 4^p(s-2)^{p/2}/p^p$. Следовательно, константа $4^p(s-2)^{p/2}/p^p$ в неравенстве (2.35) теоремы 2.20, оптимальная при $p = 2$ и любом $s \in (3, \infty)$, не является оптимальной, по крайней мере, при $p \geq s > 18$.

Приведем теперь неравенство, содержащее градиент гиперболического радиуса и справедливое в любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа при любом $p \in [1, \infty)$.

Теорема 2.21 ([8]). *Пусть $1 \leq p < \infty$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – произвольная область гиперболического типа. Для любой функции $u : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ такой, что $u \in C^1(\overline{\mathbb{C}})$ и носитель $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|(\nabla u, \nabla R)|^p}{R^{2-p}}\, dxdy \geq \frac{4^p}{p^p} \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2}\, dxdy + \frac{4^p \pi}{p^p} |u(\infty)|^p, \quad (2.36)$$

где $R = R(z, \Omega)$ – гиперболический радиус Ω в точке $z = x + iy$, $(\nabla u, \nabla R)$ – скалярное произведение градиентов функций.

Доказательство. Повторяя построения и преобразования, проведенные выше при доказательстве теорем 2.16 и 2.17, для допустимой функции u получаем тождество

$$\iint_\Omega \frac{(\nabla u, \nabla R)}{R}\, dxdy = 4 \iint_\Omega \frac{u}{R^2}\, dxdy + 4\pi u(\infty). \quad (2.37)$$

Если $p > 1$, то $|u|^p|_\Omega \in C_0^1(\Omega)$, причем $\nabla |u|^p = p|u|^{p-1}(\operatorname{sign} u)\, \nabla u$. Поэтому из тождества (2.37) следует неравенство

$$\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2}\, dxdy + \pi |u(\infty)|^p \leq \frac{p}{4} \iint_\Omega \frac{|u|^{p-1} |(\nabla u, \nabla R)|}{R}\, dxdy. \quad (2.38)$$

Для фиксированной u при $p \to 1^+$ функция $|u|^p|_\Omega$ стремится к $|u||_\Omega$ равномерно в области Ω, существует и не превосходит единицы предел $||u||^{p-1}_{C(\Omega)}$ и, кроме того, имеет место оценка

$$\iint_\Omega \frac{|u|^{p-1}|(\nabla u, \nabla R)|}{R}\, dxdy \le ||u||^{p-1}_{C(\Omega)} \iint_\Omega \frac{|(\nabla u, \nabla R)|}{R}\, dxdy.$$

Переходя к пределу при $p \to 1^+$ в неравенстве (2.38) с учетом того, что $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, получаем, что это неравенство справедлива и для $p = 1$. Итак, для $p = 1$ неравенство (2.36) доказано.

Пусть $p > 1$. Оценивая интеграл в правой части (2.38) с применением неравенства Юнга $a^{p-1}b \le (1-1/p)a^{p/(p-1)} + (1/p)b^p$, где $a = |u|^{p-1}/R^{2-2/p}$, $b = p\,|(\nabla u, \nabla R)|/4R^{2/p-1}$, непосредственными вычислениями получаем требуемое неравенство (2.36) для любого числа $p > 1$. Этим завершается доказательство теоремы.

Замечание 2.1 *В принципе, для формулировки вариационных неравенств и определения соответствующих констант удобно (и достаточно) использовать семейство функций $C_0^\infty(\Omega)$. Но мы часто пользуемся семейством $C_0^1(\Omega)$, что связано с двумя методическими причинами: проще описать контрпримеры и объяснить переход от L^1-неравенств к L^p-неравенствам при $p > 1$.*

Отметим, что универсальные неравенства, представленные теоремами 2.16 – 2.18 являются инвариантными по отношению к преобразованиям вида $w = az + b$ и $w = a\overline{z} + b$, где a и b – комплексные постоянные, $a \neq 0$.

Теоремы 2.16 – 2.18 и следующие главы 3 и 4 является центральными в данной монографии.

Глава 3

Конформно инвариантные неравенства

В пунктах 3.6 и 3.7 этой главы рассматриваются пространственные области. Сейчас и далее в пунктах 3.1 – 3.5 предполагаем, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа.

Через $C_0^\infty(\Omega)$ будем обозначать, как обычно, семейство гладких функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в области Ω. Гладкость $u(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ понимается как гладкость $u(1/z)$ в точке $z = 0$. В частности, гладкость $u(z)$ в точке $z = \infty$ означает, что $|\nabla u(z)| = O(|z|^{-2})$ при $z \to \infty$.

Пусть $F : \Omega \to \Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$ – некоторое однолистное конформное отображение области Ω на область Π. Обозначим $\zeta = F(z)$, $\zeta = \xi + i\eta \in \Pi$. Напомним, что по определению гиперболической метрики дифференциальные элементы длины $\lambda_\Omega(z)|dz|$ и площади $\lambda_\Omega^2(z)\, dxdy$ являются конформно инвариантными величинами, т. е. имеют место тождества

$$\lambda_\Omega(z)|dz| \equiv \lambda_\Pi(\zeta)|d\zeta|, \quad \lambda_\Omega^2(z)\, dxdy \equiv \lambda_\Pi^2(\zeta)\, d\xi d\eta,$$

где $z = x + iy \in \Omega$, $\zeta = F(z) = \xi + i\eta \in \Pi$.

Как обычно, через Δu и ∇u будем обозначать, соответственно, лапласиан и градиент гладкой функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Нам также потребуется числовой параметр $p \in [1, \infty)$ и гиперболический радиус $R(z, \Omega) := 1/\lambda_\Omega(z)$.

3.1 Обозначения и базовые факты

Через $F : \Omega \to \Pi \subset \overline{\mathbb{C}}$ обозначим снова некоторое однолистное конформное отображение области Ω на область Π. Хорошо известно, что интеграл Дирихле

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 dx\, dy := \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy$$

является конформно инвариантной величиной.

С использованием свойств гиперболической метрики и равенства $|F'(z)|^2\, dx\, dy = d\xi\, d\eta$ легко показать, что конформно инвариантными величинами являются следующие интегралы

$$\iint_\Omega \frac{|u(z)|^p dx\, dy}{R^2(z, \Omega)}, \quad \iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p dx\, dy}{R^{2-p}(z, \Omega)}, \quad \iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p dx\, dy}{R^{2-2p}(z, \Omega)}. \tag{3.1}$$

В частности, для гладких функций

$$u \in C_0^\infty(\Omega), \quad U := u \circ F^{-1} \in C_0^\infty(\Pi)$$

имеют место равенства

$$\iint_\Omega \frac{|u(z)|^p}{R^2(z, \Omega)}\, dx\, dy = \iint_\Pi \frac{|U(\zeta)|^p}{R^2(\zeta, \Pi)}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z, \Omega)}\, dx\, dy = \iint_\Pi \frac{|\nabla U(\zeta)|^p}{R^{2-p}(\zeta, \Pi)}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p}{R^{2-2p}(z,\Omega)}\, dx\, dy = \iint_\Pi \frac{|\Delta U(\zeta)|^p}{R^{2-2p}(\zeta,\Pi)}\, d\xi\, d\eta.$$

Эти соотношения приведены в нашей статье [9]. При выводе этих формул мы воспользовались следующими хорошо известными тождествами

$$\Delta U(\zeta) = 4\frac{\partial^2 U(\zeta)}{\partial\zeta\,\partial\overline{\zeta}} = 4\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z\,\partial\overline{z}}\, |F'(z)|^2 = (\Delta u(z))\ |F'(z)|^2,$$

$$\nabla U(\zeta) = 2\frac{\partial U(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} = 2\frac{\partial u(z)}{\partial\overline{z}}\ \overline{F'(z)} = (\nabla u(z))\ \overline{F'(z)}.$$

Мы рассмотрим ряд конформно инвариантных неравенств, содержащих конформно инвариантные интегралы для функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Основными из них являются следующие аналоги неравенств типа Харди и Реллиха

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \geq c_p(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy, \tag{3.2}$$

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p}{R^{2-2p}(z,\Omega)}dxdy \geq c_p^*(\Omega) \iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy, \tag{3.3}$$

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta u(z)|^p}{R^{2-2p}(z,\Omega)}dxdy \geq c_p^{**}(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy, \tag{3.4}$$

где $p \in [1,\infty)$ – фиксированный параметр, u – произвольная вещественнозначная функция из семейства $C_0^\infty(\Omega)$.

Константы $c_p(\Omega)$, $c_p^*(\Omega)$, $c_p^{**}(\Omega)$ в этих неравенствах будем считать максимальными из возможных. А именно, полагаем

$$c_p(\Omega) := \inf_{u\in C_0^\infty(\Omega),\, u\not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |\nabla u(z)|^p/R^{2-p}(z,\Omega)\, dx\, dy}{\iint_\Omega |u(z)|^p/R^2(z,\Omega)\, dx\, dy},$$

$$c_p^*(\Omega) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |\Delta u(z)|^p / R^{2-2p}(z,\Omega)\, dx\ dy}{\iint_\Omega |\nabla u(z)|^p / R^{2-p}(z,\Omega)\, dx\, dy},$$

$$c_p^{**}(\Omega) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |\Delta u(z)|^p / R^{2-2p}(z,\Omega)\, dx\ dy}{\iint_\Omega |u(z)|^p / R^{2}(z,\Omega)\, dx\, dy}.$$

Ясно, что числа $c_p(\Omega)$, $c_p^*(\Omega)$, $c_p^{**}(\Omega)$ в неравенствах (3.2) – (3.4) являются неотрицательными конформно инвариантными величинами. В частности, имеют место равенства

$$c_p(\Omega) = c_p(\Pi), \quad c_p^*(\Omega) = c_p^*(\Pi), \quad c_p^{**}(\Omega) = c_p^{**}(\Pi)$$

и неравенства

$$0 \le c_p(\Omega) < \infty, \quad 0 \le c_p^*(\Omega) < \infty, \quad 0 \le c_p^{**}(\Omega) < \infty.$$

В односвязных и двусвязных областях неравенство (3.2) хорошо известно с точной константой. А именно, справедлива

Теорема 3.1 (см., например, [8]). *Если $p \in [1,\infty)$ и Ω – односвязная или двусвязная область гиперболического типа, то константа $c_p(\Omega) = 2^p/p^p$, т. е. для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(x+iy,\Omega)} \ge \frac{2^p}{p^p} \iint_\Omega \frac{|u|^p dxdy}{R^2(x+iy,\Omega)}, \tag{3.5}$$

причем константа $2^p/p^p$ является точной, т. е. максимальной из возможных при любом $p \in [1,\infty)$ и любой односвязной или двусвязной области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа.

Доказательство основано на двух следующих леммах.

Лемма 3.1 ([8]). *Для любого $p \in [1,\infty)$ и любой вещественн-*

нозначной функции $v \in C_0^1(0,\pi)$ *имеют место неравенства*

$$\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)|^p\sqrt{(1-\sin^2\theta)^p}}{\sin^{2-p}\theta}\,d\theta \geq \frac{1}{p^p}\int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\sin^2\theta}\,d\theta, \qquad (3.6)$$

$$\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)|^p}{\sin^{2-p}\theta}\,d\theta \geq \frac{1}{p^p}\int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\sin^2\theta}\,d\theta, \qquad (3.7)$$

причем константа $1/p^p$ *является точной, т. е. максимальной: для любых чисел* $p \in [1,\infty)$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует такая функция* $v \in C_0^1(0,\pi)$, *что*

$$\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)|^p}{\sin^{2-p}\theta}\,d\theta \leq \frac{1+\varepsilon}{p^p}\int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Доказательство. Пусть v – функция, удовлетворяющая условиям леммы. Обозначим $g(\theta) = \int_0^\theta |v'(\varphi)|d\varphi$, где $v \in C_0^1(0,\pi)$ – вещественнозначная функция. Поскольку $|v(\theta)| \leq g(\theta)$, то интегрированием по частям получаем

$$\int_0^{\pi/2} \frac{|v(\theta)|}{\sin^2\theta}\,d\theta \leq \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\int_0^\varphi g'(\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} |v'(\theta)|d\theta \int_\theta^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = \int_0^{\pi/2} |v'(\theta)|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta.$$

Применяя аналогичные преобразования на отрезке $[\pi/2,\pi]$ по отношению к функции $g(\theta) = \int_\theta^{\pi/2} |v'(\varphi)|d\varphi$, получаем неравенство

$$\int_{\pi/2}^\pi \frac{|v(\theta)|}{\sin^2\theta}\,d\theta \leq \int_{\pi/2}^\pi |v'(\theta)|\frac{|\cos\theta|}{\sin\theta}\,d\theta.$$

В итоге приходим к неравенству

$$\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)|\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}\,d\theta \geq \int_0^\pi \frac{|v(\theta)|}{\sin^2\theta}\,d\theta, \qquad (3.8)$$

совпадающим с неравенством (3.6) при $p = 1$.

Пусть теперь $p > 1$ и $v \in C_0^1(0,\pi)$. Тогда $|v|^p \in C_0^1(0,\pi)$, и неравенство (3.8), примененная к функции $|v|^p$, имеет вид

$$p\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)||v(\theta)|^{p-1}\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}\,d\theta \geq \int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Оценивая сверху левую часть в этом неравенстве с помощью неравенства Гёльдера с показателями $1/p$ и $1-1/p$, получаем

$$p\left(\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)|^p\sqrt{(1-\sin^2\theta)^p}}{\sin^{2-p}\theta}\,d\theta\right)^{1/p}\left(\int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\sin^2\theta}\,d\theta\right)^{1-1/p} \geq$$

$$\geq \int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\sin^2\theta}\,d\theta,$$

что влечет доказываемое неравенство (3.6) при $p > 1$.

Очевидно, (3.6) влечет (3.7).

Остается доказать точность постоянной $1/p^p$. Предположим противное: существуют числа $p_0 \in [1,\infty)$ и $\varepsilon_0 > 0$, такие, что для любой вещественнозначная функции $v \in C_0^1(0,\pi)$ имеет место неравенство

$$\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)|^{p_0}}{\sin^{2-p_0}\theta}\,d\theta \geq \frac{1+\varepsilon_0}{p_0^{p_0}}\int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^{p_0}}{\sin^2\theta}\,d\theta. \tag{3.9}$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций g_ε, определенных формулами: $g_\varepsilon(\theta) = \varepsilon^{(1-\varepsilon)/p_0}$ для $\theta \in (\varepsilon, \pi-\varepsilon)$,

$$g_\varepsilon(\theta) = \theta^{(1-\varepsilon)/p_0} \quad \text{для} \quad \theta \in (0,\varepsilon],$$

$$g_\varepsilon(\theta) = (\pi-\theta)^{(1-\varepsilon)/p_0} \quad \text{для} \quad \theta \in [\pi-\varepsilon,\pi),$$

где параметр $\varepsilon \in (0,1)$. Нетрудно видеть, что при любом $\varepsilon \in (0,1)$

функция g_ε принадлежит замыканию $C_0^1(0,\pi)$ по норме

$$||v|| = \left(\int_0^\pi \frac{|v'(\theta)|^p}{\sin^{2-p}\theta}\,d\theta\right)^{1/p} + \left(\int_0^\pi \frac{|v(\theta)|^p}{\sin^2\theta}\,d\theta\right)^{1/p}.$$

Поэтому функция g_ε должна удовлетворять неравенству (3.9), что приводит к неравенству

$$\frac{(1-\varepsilon)^{p_0}}{p_0^{p_0}}\int_0^\varepsilon \frac{\theta^{1-\varepsilon-p_0}}{\sin^{2-p_0}\theta}\,d\theta \geq \frac{1+\varepsilon_0}{p_0^{p_0}}\left(\int_0^\varepsilon \frac{\theta^{1-\varepsilon}}{\sin^2\theta}\,d\theta + \int_\varepsilon^{\pi/2}\frac{\varepsilon^{1-\varepsilon}}{\sin^2\theta}\,d\theta\right).$$

Отсюда следует, что

$$1+\varepsilon_0 \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_0^\varepsilon \frac{\theta^{1-\varepsilon}}{\sin^2\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{p_0}\,d\theta}{\int_0^\varepsilon \frac{\theta^{1-\varepsilon}}{\sin^2\theta}\,d\theta} \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_0^\varepsilon \frac{\theta^{1-\varepsilon}}{\sin^2\theta}\,d\theta}{\int_0^\varepsilon \frac{\theta^{1-\varepsilon}}{\sin^2\theta}\,d\theta} = 1.$$

Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Справедливо также следующее утверждение.

Лемма 3.2 ([8]). *Пусть $p \in [1,\infty)$.*

1) Предположим, что $q \in (0,1)$, $M_q = (2\pi)^{-1}\ln(1/q)$,

$$\rho_q(r) = 4M_q\, r\,\sin\frac{\pi\ln r}{\ln q}, \quad \theta_q(r) = \pi\frac{\ln(1/r)}{\ln(1/q)} \in (0,\pi).$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $v \in C_0^1(q,1)$ имеют место неравенства

$$\int_q^1 \frac{|v'(r)|^p\sqrt{\left(1-\sin^2\theta_q(r)\right)^p}}{\rho_q^{2-p}(r)}\,rdr \geq \frac{2^p}{p^p}\int_q^1 \frac{|v(r)|^p}{\rho_q^2(r)}\,rdr, \tag{3.10}$$

$$\int_q^1 \frac{|v'(r)|^p}{\rho_q^{2-p}(r)}\,rdr \geq \frac{2^p}{p^p}\int_q^1 \frac{|v(r)|^p}{\rho_q^2(r)}\,rdr, \tag{3.11}$$

причем константа $2^p/p^p$ является точной, т. е. максимальной: для любых чисел $q \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$ и $\varepsilon > 0$ существует такая *функция $v \in C_0^1(0,\pi)$, что*

$$\int_q^1 \frac{|v'(r)|^p}{\rho_q^{2-p}(r)} r dr \le \left(\frac{2^p}{p^p} + \varepsilon\right) \int_q^1 \frac{|v(r)|^p}{\rho_q^2(r)} r dr.$$

2) Пусть $\rho_0(r) = 2\, r\, \ln(1/r)$. Тогда для любой вещественнозначной функции $v \in C_0^1(0,1)$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 \frac{|v'(r)|^p}{\rho_0^{2-p}(r)} r dr \ge \frac{2^p}{p^p} \int_0^1 \frac{|v(r)|^p}{\rho_0^2(r)} r dr, \tag{3.12}$$

причем константа $2^p/p^p$ является точной, т. е. максимальной: для любых чисел $p \in [1,\infty)$ и $\varepsilon > 0$ существует такая функция $v \in C_0^1(0,\pi)$, что

$$\int_0^1 \frac{|v'(r)|^p}{\rho_0^{2-p}(r)} r dr \le \left(\frac{2^p}{p^p} + \varepsilon\right) \int_0^1 \frac{|v(r)|^p}{\rho_0^2(r)} r dr.$$

Доказательство. Часть 1) этой леммы равносильна предыдущей лемме. Соответствующие неравенства эквивалентны, получаются друг из друга заменой переменных $\theta = -C \ln r$, где

$$C = \pi/\ln(1/q), \quad 0 < q \le r \le 1.$$

Неравенство (3.12) обосновывается следующим образом. Пусть $v \in C_0^1(0,1)$. Носитель этой функции лежит на отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо (3.10) для любого $q \in (0,\varepsilon)$. При $q \to 0^+$ и фиксированной v подынтегральные функции из (3.10) сходятся равномерно на отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ к соответствующим подынтегральным функциям из (3.12) с учетом того, что $\rho_q(r) \to \rho_0(r)$ и $\theta_q(r) \to 0$ равномерно на $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Для обоснования точности константы $2^p/p^p$ заметим, что заменой переменных $\ln(1/r) = t$, $g(t) := v(r)$ неравенство (3.11) сводится к неравенству Харди

$$\int_0^\infty \frac{|g'(t)|^p}{t^{2-p}}\,dt \geq \frac{1}{p^p}\int_0^\infty \frac{|g(t)|^p}{t^2}\,dt$$

с точной константой $1/p^p$.

Доказательство теоремы 3.1, случай односвязных областей. В силу конформной инвариантности нам достаточно доказать равенство $c_p(\Omega) = 2^p/p^p$ лишь для одной из односвязных областей гиперболического типа. В качестве такой области возьмем полосу

$$Q_\pi = \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 < \eta = \Im\,\zeta < \pi\}$$

с конформным радиусом $R(\zeta, Q_\pi) = 2\sin\eta$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Пусть $u \in C_0^1(Q_\pi)$. Применяя неравенство (3.7) к функции u по переменной η при любом фиксированном ξ, учитывая неравенство $|\nabla u| \geq |\partial u/\partial\eta|$ и интегрируя затем по ξ, получаем

$$\iint_{Q_\pi} \frac{|\nabla u(\zeta)|^p}{R^{2-p}(\zeta, Q_\pi)}d\xi d\eta \geq \frac{2^p}{p^p}\iint_{Q_\pi} \frac{|u(\zeta)|^p}{R^2(\zeta, Q_\pi)}d\xi d\eta.$$

Равносильное неравенство для верхней полуплоскости

$$H^+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 < \eta = \Im\,\zeta\}$$

с конформным радиусом $R(\zeta, H^+) = 2\eta$ имеет вид

$$\iint_{H^+} \frac{|\nabla u(\zeta)|^p}{\eta^{2-p}}d\xi d\eta \geq \frac{1}{p^p}\iint_{H^+} \frac{|u(\zeta)|^p}{\eta^2}d\xi d\eta$$

с точной постоянной $1/p^p$. Отсюда и следует точность постоянной $2^p/p^p$ в теореме 3.1 для случая односвязных областей.

Случай двусвязных областей. В силу конформной инвариантности достаточно доказать равенство $c_p(\Omega) = 2^p/p^p$ лишь для круговых колец с заданным модулем. Иными словами, нам остается доказать соответствующие неравенства для концентрических колец $A_q = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$, где $q \in [0, 1)$.

Пусть $u \in C_0^1(A_q)$. Заметим, что гиперболический радиус кольца A_q определяется формулой $R(z, A_q) = \rho_q(|z|)$ (см., например, [64], гл. 3). Ясно, что применение неравенств (3.11) и (3.12) к функции u по переменной $r = |z|$ и последующее интегрирование по угловой переменной приводят к следующему неравенству в кольца A_q

$$\iint_{A_q} \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z, A_q)} dxdy \geq \frac{2^p}{p^p} \iint_{A_q} \frac{|u|^p}{R^2(z, A_q)} dxdy \quad (z = x + iy).$$

Записывая это неравенство в полярных координатах и применяя его к функциям вида $u = g(\theta)v(r)$, где $v \in C_0^1(0, 1)$, и деля обе части получаемого неравенства на $2\pi = \int_0^{2\pi} d\theta$, приходим к одномерным неравенствам (3.11) и (3.12) с точными постоянными, что влечет точность констант для колец. Теорема доказана.

С применением первых неравенств двух предыдущих лемм получаем следующее утверждение, доказанное в статье [8].

Предложение 3.1 *Пусть $p \in [1, \infty)$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область гиперболического типа или двусвязная область с конечным модулем, $z = x + iy$. Тогда существует непрерывная функция $\theta_\Omega : \Omega \to (0, \pi)$, такая, что для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z, \Omega)} \left(1 - \sin^2 \theta_\Omega(z)\right)^{p/2} dxdy \geq \frac{2^p}{p^p} \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z, \Omega)} dxdy.$$

В дальнейшем мы часто пользуемся константами $c_p(\Omega)$, $c_p^*(\Omega)$, $c_p^{**}(\Omega)$ и базовым фактом о том, что $c_p(\Omega) = 2^p/p^p$ для любой односвязной или двусвязной области гиперболического типа. Обобщения и усиления этого базового факта при $p = 2$ для односвязных областей представлены в следующем пункте.

3.2 Случай односвязных областей

Классическое вариационное исчисление на примере большого массива экстремальных проблем приучает нас к тому, что точные постоянные возникают как характеристики соответствующих экстремальных функций. Известно также, что существуют исключительные случаи. Одним из таких примеров является одномерное неравенство Харди (см. выше теорему 2.19 при $p > 1$), где отсутствует экстремальная функция, реализующая точную константу. Мы встретимся с рядом подобных случаев, при этом обоснование точности констант будет связано с построением подходящих контрпримеров.

В пункте 3.1 мы убедились, что константа 1, незримо стоящая перед интегралом в правой части простейшего конформно инвариантного неравенства (1) является точной, т. е. не может быть заменена на постоянную $1+\varepsilon$ ни при каком $\varepsilon > 0$. Оказывается, что эта константа относится к исключительному случаю. А именно, в односвязной области Ω гиперболического типа существует гладкая функция $\rho : \Omega \to (0, \infty)$, позволяющая записать следующее усиление неравенства (1):

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \geq \iint_\Omega \left(\frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} + \rho(z)|u|^2 \right) dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Для обоснования подобного неравенства и нескольких его обобщений нам потребуется следующее интегральное неравенство типа Пуанкаре и Харди на конечном отрезке.

Лемма 3.3 ([8]). *Пусть $v : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ – абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $v(0) = v(\pi) = 0$, $v \not\equiv 0$, $v' \in L^2(0,\pi)$. Тогда*

$$\int_0^\pi v'^2(\theta)\, d\theta > \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{v^2(\theta)}{\sin^2\theta}\, d\theta + \frac{1}{4} \int_0^\pi v^2(\theta)\, d\theta. \qquad (3.13)$$

Постоянные $1/4$ *являются точными: ни одну из них нельзя заменить на* $(1+\varepsilon_0)/4$ *при любом* $\varepsilon_0 > 0$.

Доказательство. Пусть v – допустимая функция. Рассмотрим базовую функцию $v_0(\theta) = \sqrt{\sin\theta}$ и несобственный интеграл

$$I(v) = \int_0^\pi \left(v'(\theta) - v(\theta)\frac{v_0'(\theta)}{v_0(\theta)}\right)^2 d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \left(v'^2(\theta) - 2v(\theta)v'(\theta)\frac{v_0'(\theta)}{v_0(\theta)} + v^2(\theta)\frac{v_0'^2(\theta)}{v_0^2(\theta)}\right) d\theta$$

с возможными особенностями в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Если интеграл $I(v) = 0$, то $v(\theta) = Cv_0(\theta)$, $C = const \neq 0$. Но тогда $v_0' \in L^2(0,\pi)$, что противоречит равенствам

$$\int_0^\pi v_0'^2(\theta)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta = +\infty.$$

Покажем, что интеграл $I(v)$ сходится, и $I(v)$ является положительным числом. Действительно, для малых положительных θ

$$|v(\theta)| \leq \int_0^\theta |v'(t)|dt \leq \sqrt{\theta\int_0^\theta |v'(t)|^2 dt} = o(\sqrt{\theta}),$$

и аналогично получаем соотношение $|v(\theta)| = o(\sqrt{\pi-\theta})$ для малых положительных $\pi - \theta$. Поэтому

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{v^2(\theta)v_0'(\theta)}{v_0(\theta)} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{v^2(\theta)}{2\sin\theta} = 0,$$

$$\lim_{\theta\to \pi^-} \frac{v^2(\theta)v_0'(\theta)}{v_0(\theta)} = -\lim_{\theta\to \pi^-} \frac{v^2(\theta)}{2\sin\theta} = 0.$$

Интегрируя по частям среднее слагаемое во втором выражении для $I(v)$, получаем равенства

$$I(v) = \int_0^\pi v'^2(\theta)d\theta + \lim_{a\to 0^+,\, b\to\pi^-} \int_a^b \frac{v_0''(\theta)}{v_0(\theta)} v^2(\theta)d\theta -$$

$$- \lim_{\theta\to\pi^-} v^2(\theta)\frac{v_0'(\theta)}{v_0(\theta)} + \lim_{\theta\to 0^+} v^2(\theta)\frac{v_0'(\theta)}{v_0(\theta)} =$$

$$= \int_0^\pi v'^2(\theta)d\theta - \frac{1}{4} \lim_{a\to 0^+,\, b\to\pi^-} \int_a^b \left(1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\right) v^2(\theta)d\theta.$$

Итоговое равенство имеет вид

$$I(v) = \int_0^\pi v'^2(\theta)d\theta - \frac{1}{4}\int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\right) v^2(\theta)d\theta. \tag{3.14}$$

Последний интеграл сходится, так как в противном случае он равнялся бы $+\infty$ в силу неотрицательности подинтегральной функции. Но тогда $I(v) = -\infty$, что противоречит установленным выше неравенствам $0 < I(v) \leq +\infty$. Таким образом, $I(v) \in (0, \infty)$, и (3.14) влечет неравенство (3.13). Остается показать точность констант. Пусть $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, докажем, что ни одну из констант $1/4$ в неравенстве (3.13) нельзя заменить на $(1+\varepsilon_0)/4$. Рассмотрим допустимую функцию $v_\varepsilon(\theta) = (\sin\theta)^{1/2+\varepsilon/2}$, где ε – положительный параметр. Покажем, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция v_ε удовлетворяет неравенствам

$$\int_0^\pi v_\varepsilon'^2(\theta)d\theta < X_1(v_\varepsilon), \quad \int_0^\pi v_\varepsilon'^2(\theta)d\theta < X_2(v_\varepsilon) \tag{3.15}$$

где

$$X_1(v_\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon_0}{4}\int_0^\pi \frac{v_\varepsilon^2(\theta)}{\sin^2\theta}\,d\theta + \frac{1}{4}\int_0^\pi v_\varepsilon^2(\theta)\,d\theta,$$

$$X_2(v_\varepsilon) = \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{v_\varepsilon^2(\theta)}{\sin^2\theta}\,d\theta + \frac{1+\varepsilon_0}{4}\int_0^\pi v_\varepsilon^2(\theta)\,d\theta.$$

Имеем
$$\int_0^\pi v_\varepsilon'^2(\theta)d\theta = \frac{(1+\varepsilon)^2}{4}\int_0^\pi \frac{\cos^2\theta}{\sin^{1-\varepsilon}\theta}\,d\theta,$$
$$X_1(v_\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon_0}{4}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^{1-\varepsilon}\theta} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^{1+\varepsilon}\theta\,d\theta,$$
и первое неравенство в (3.15) справедливо, если
$$0 < \varepsilon \le \sqrt{1+\varepsilon_0} - 1.$$

Далее, имеем
$$X_2(v_\varepsilon) = \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^{1-\varepsilon}\theta} + \frac{1+\varepsilon_0}{4}\int_0^\pi \sin^{1+\varepsilon}\theta\,d\theta,$$
и простые преобразования показывают, что
$$\int_0^\pi v_\varepsilon'^2(\theta)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^{1-\varepsilon}\theta} + \frac{1+\varepsilon}{4}\int_0^\pi \sin^{1+\varepsilon}\theta\,d\theta,$$
поэтому второе неравенство в (3.15) справедливо, если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Лемма доказана полностью.

Теорема 3.2 ([8]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область гиперболического типа, g – любое из однолистных конформных отображений Ω на полуплоскость $H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*
$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \ge \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1}{4}\iint_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy, \quad (3.16)$$
где $z = x + iy$. Постоянная $1/4$ является точной.

Доказательство. Заменой переменных $\zeta = g(z)$ легко убеждаемся в том, что (3.16) равносильно следующему неравенству

$$\iint_{H_+} |\nabla u|^2 d\xi d\eta \geq \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{R^2(\zeta, H_+)} d\xi d\eta + \frac{1}{4} \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{|\zeta|^2} d\xi d\eta \quad (3.17)$$

для функций $u \in C_0^1(H_+)$. Докажем неравенство (3.17).

Пусть $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = |\zeta| > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$, $u \in C_0^1(H_+)$ – вещественнозначная функция. Применим к этой функции неравенство (3.13) по переменной $\varphi = \theta$ при любом фиксированном $\rho > 0$. Будем иметь

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi \geq \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{|u|^2}{\sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{1}{4} \int_0^\pi |u|^2 d\varphi.$$

Делим обе части этого неравенства на $\rho > 0$ и интегрируем по переменной $\rho \in (0, \infty)$. Получаем неравенство

$$\iint_{H_+} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 d\xi d\eta \geq \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{4\rho^2 \sin^2 \varphi} d\xi d\eta + \frac{1}{4} \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{\rho^2} d\xi d\eta,$$

которое влечет неравенство (3.17) в силу хорошо известных фактов: $R(\rho e^{i\varphi}, H_+) = 2\eta = 2\rho \sin \varphi$ и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Из точности констант $1/4$ в лемме легко следует, что константа $1/4$ в неравенствах (3.16) и (3.17) является точной.

Для выпуклой области

$$\sup_{z \in \Omega} |\nabla R(z, \Omega)| \leq 2, \quad R(z, \Omega) \leq 2 \operatorname{dist}(z, \partial\Omega), z \in \Omega,$$

в силу теоремы Лёвнера (см. теорему 1.7). Поэтому получаем

Следствие 3.2.1 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – выпуклая область, не совпада-*

ющая со всей плоскостью, g – одно из однолистных конформных отображений Ω на верхнюю полуплоскость H_+. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \geqslant \frac{1}{4}\iint_\Omega \frac{|u|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)}dxdy + \frac{1}{4}\iint_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy,$$

где $z = x + iy$. Обе постоянные $1/4$ являются точными.

Теорема 3.3 ([9]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – односвязная область гиперболического типа, g – любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость*

$$H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}.$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2\, dx\, dy \geq$$

$$\geq \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)}dx\, dy + \frac{1}{2}\iint_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\, dy, \tag{3.18}$$

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2\, dx\, dy \geq$$

$$\geq \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy + \frac{1}{4}\iint_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\, dy, \tag{3.19}$$

где $z = x + iy$.

Доказательство теоремы 3.3 . Пусть u – вещественнозначная функция, $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Предположим также, что $u \not\equiv 0$, так как для $u \equiv 0$ неравенства (3.18) и (3.19) тривиальны. Пользуясь формулой Грина

$$-\iint_\Omega u\Delta u\,dx\,dy = \iint_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy$$

и элементарным неравенством вида $a^2+b^2 \geq 2\,ab$ при

$$a = |u(z)|/R(z,\Omega), \quad b = |\Delta u(z)|\,R(z,\Omega),$$

получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega |\Delta u|^2\,R^2(z,\Omega)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint_\Omega |u|^2/R^2(z,\Omega)\,dx\,dy \geq$$

$$\geq \iint_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy. \tag{3.20}$$

Нам потребуется неравенство (3.16) теоремы 3.2.

Из формул (3.20) и (3.16) следует, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega |\Delta u|^2\,R^2(z,\Omega)\,dx\,dy \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\iint_\Omega |u|^2/R^2(z,\Omega)dx\,dy + \frac{1}{4}\iint_\Omega |u|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy,$$

а также неравенство

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega |\Delta u|^2\,R^2(z,\Omega)\,dx\,dy \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dy + \frac{1}{8}\iint_\Omega |u|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy.$$

Умножая обе части этих неравенств на 2, получаем неравенства (3.18) и (3.19). Этим и завершается доказательство теоремы 3.3.

Поскольку для выпуклой области $R(z,\Omega) \leq 2\,\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)$ в силу теоремы 1.7, то справедливо

Следствие 3.3.1 *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ – выпуклая область, $\Omega \neq \mathbb{C}$, g – любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость H_+. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства*

$$\iint_\Omega \operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)|\Delta u|^2\,dx\,dy \geq \frac{1}{16}\iint_\Omega \frac{|u|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)}dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{8}\iint_\Omega |u|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy,$$

$$\iint_\Omega \operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)|\Delta u|^2 dxdy \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy + \frac{1}{16}\iint_\Omega |u|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy,$$

где $z = x+iy$.

Для односвязной области $R(z,\Omega) \leq 4\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$, $z \in \Omega$, в силу теоремы Кёбе об одной четвертой. Поэтому имеет место

Следствие 3.3.2 *Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $\Omega \neq \mathbb{C}$, g – любое из однолистных конформных отображений Ω на полуплоскость H_+. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства*

$$\iint_\Omega \operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)|\Delta u|^2\,dx\,dy \geq \frac{1}{256}\iint_\Omega \frac{|u|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)}dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{32}\iint_\Omega |u|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy,$$

$$\iint_\Omega \operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)|\Delta u|^2 dxdy \geq$$

$$\geq \frac{1}{16}\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy + \frac{1}{64}\iint_\Omega |u|^2\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy,$$

где $z = x + iy$.

Теорема 3.4 ([9]). *Для любой односвязной области* Ω *гиперболического типа имеем равенства:* $c_2^*(\Omega) = 1$ *и* $c_2^{**}(\Omega) = 1$. *Следовательно, если* Ω *– односвязная область гиперболического типа, то для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеют место неравенства*

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2\, dx\, dy \geq \iint_\Omega |u|^2/R^2(z,\Omega) dx\, dy, \tag{3.21}$$

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2\, dx\, dy \geq \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy, \tag{3.22}$$

и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ *существуют функции*

$$u_1 \in C_0^\infty(\Omega), \quad u_2 \in C_0^\infty(\Omega)$$

такие, что

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u_1|^2\, dx\, dy < (1+\varepsilon) \iint_\Omega |u_1|^2/R^2(z,\Omega) dx\, dy, \tag{3.23}$$

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u_2|^2\, dx\, dy < (1+\varepsilon) \iint_\Omega |\nabla u_2|^2 dx\, dy. \tag{3.24}$$

Доказательство теоремы 3.4. Неравенства (3.21) и (3.22) являются простыми следствиями (3.18) и (3.19). Сравнивая (3.21) и (3.22) с неравенствами (3.3) и (3.4) при $p = 2$ и учитывая определение констант как максимальных величин, допустимых в соответствующих вариационных неравенствах, получаем оценки $c_2^*(\Omega) \geq 1$ и $c_2^{**}(\Omega) \geq 1$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ неравенства (3.23) и (3.24) эквивалентны противоположным оценкам $c_2^*(\Omega) \leq 1$ и $c_2^{**}(\Omega) \leq 1$. Чтобы убедиться в справедливости оценок $c_2^*(\Omega) \leq 1$ и $c_2^{**}(\Omega) \leq 1$

достаточно рассмотреть случай, когда область

$$\Omega = H_+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$$

– верхняя полуплоскость, так как рассматриваемые неравенства являются конформно инвариантными. Нам потребуется известная формула $\lambda_{H_+}(x+iy) \equiv 1/(2y)$.

Предположим, что $c_2^*(H_+) = 1 + \varepsilon_0 > 1$. Тогда

$$\iint_{H_+} y^2 |\Delta u|^2 \, dx\, dy \geq \frac{1+\varepsilon_0}{16} \iint_{H_+} \frac{|u|^2}{y^2} dx\, dy \qquad \forall u \in C_0^\infty(H_+).$$

Но это неравенство, как показано нами в [53] (см. там лемму 3 и теорему 4), справедливо лишь при условии $\varepsilon_0 = 0$. Этим и завершается обоснование равенства $c_2^*(\Omega) = 1$.

Предположим, что $c_2^{**}(H_+) = 1 + \varepsilon_0 > 1$. Тогда $\forall u \in C_0^\infty(H_+)$

$$\iint_{H_+} y^2 |\Delta u|^2 \, dx\, dy \geq \frac{1+\varepsilon_0}{4} \iint_{H_+} |\nabla u|^2 \, dx\, dy. \tag{3.25}$$

Покажем, что это неравенство справедливо лишь при условии $\varepsilon_0 = 0$. С этой целью выберем функции $u \in C_0^\infty(H_+)$ специальным образом.

Пусть a – произвольная положительная постоянная, φ_0 – четная функция, такая, что $\varphi_0 \in C_0^\infty(-1, 1)$, $\varphi_0(0) = 1$. Определим функцию $\varphi_a \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$ условиями: φ_a – четная функция, $\varphi_a(x) \equiv 1$ при $0 \leq x \leq a$, $\varphi_a(x) \equiv 0$ при $a + 1 \leq x < \infty$, $\varphi_a(x) \equiv \varphi_0(x - a)$ при $a < x < a + 1$. Положим

$$u_a(x + iy) \equiv \varphi_a(x)\, \psi(y),$$

где $\psi \in C_0^\infty(0, \infty)$. Применим неравенство (3.25) к функции u_a и поделим полученное соотношение на $2a$. После простых преобразований, связанных с переходом к повторным интегралам и с применением равенств вида

$$\int_{-a}^{a} dx = 2a, \quad \int_{a}^{a+1} \Phi(x,y)\,dx = \int_{0}^{1} \Phi(x+a,y)\,dx,$$

будем иметь неравенство

$$\int_0^\infty y^2 \left|\psi''(y)\right|^2 dy \geq \frac{1+\varepsilon_0}{4} \int_0^\infty \left|\psi'(y)\right|^2 dy + \frac{X}{2a}, \tag{3.26}$$

где

$$X = -2\int_0^\infty y^2 dy \int_0^1 \left|\varphi_0(x)\psi''(y) + \psi(y)\varphi_0''(x)\right|^2\,dx +$$

$$+2\int_0^\infty dy \int_0^1 \left[\left|\varphi_0(x)\psi'(y)\right|^2 + \left|\psi(y)\varphi_0'(x)\right|^2\right]\,dx.$$

Поскольку X не зависит от a, то $X/(2a) \to 0$ при $a \to \infty$ для произвольных, но фиксированных функций

$$\varphi_0 \in C_0^\infty(-1,1), \quad \psi \in C_0^\infty(0,\infty).$$

Поэтому из (3.26) следует, что

$$\int_0^\infty y^2 \left|\psi''(y)\right|^2 dy \geq \frac{1+\varepsilon_0}{4} \int_0^\infty \left|\psi'(y)\right|^2 dy \tag{3.27}$$

для произвольной функции $\psi \in C_0^\infty(0,\infty)$.

Для любого $\gamma > 0$ функция ψ_γ, определяемая равенствами $\psi_\gamma(y) = 1$ при $0 < y < 1$ и $\psi_\gamma(y) = y^{1/2-\gamma}$ при $1 \leq y < \infty$, принадлежит замыканию семейства $C_0^\infty(0,\infty)$ по норме

$$||\psi|| = \sqrt{\int_0^\infty \left|\psi'(y)\right|^2 dy} + \sqrt{\int_0^\infty y^2 \left|\psi''(y)\right|^2 dy}.$$

Поэтому неравенство (3.27) должно выполняться и для функции

ψ_γ с параметром $\gamma > 0$. Применяя (3.27) к функции ψ_γ и переходя к пределу при $\gamma \to 0$, получаем, что

$$\frac{1}{16} = \lim_{\gamma\to 0} 2\gamma \int_0^\infty y^2 \left|\psi_\gamma''(y)\right|^2 dy \geq$$

$$\geq \frac{1+\varepsilon_0}{4} \lim_{\gamma\to 0} 2\gamma \int_0^\infty \left|\psi_\gamma'(y)\right|^2 dy = \frac{1+\varepsilon_0}{16}.$$

Полученное неравенство противоречит нашему допущению о том, что $\varepsilon_0 > 0$.

Этим и завершается доказательство равенства $c_2^{**}(\Omega) = 1$ для любой односвязной области Ω. Теорема 3.4 доказана.

3.3 Неравенства в двусвязных областях

Заменой переменных $\theta = -C \ln r$ в интегралах неравенства (3.13) леммы 3.3, где $0 < q \leq r \leq 1$ и $C = \pi/\ln(1/q)$, получаем

Следствие 3.4.1 ([8]). *Пусть $q \in (0,1)$. Для любой абсолютно непрерывной функции $v : [q,1] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$v(q) = v(1) = 0, \quad v \not\equiv 0, \quad v' \in L^2(q,1),$$

имеет место неравенство

$$\int_q^1 v'^2(r)\, r dr > \int_q^1 \frac{v^2(r)}{\rho^2(x)}\, r dr + \frac{\pi^2}{4\ln^2 q} \int_q^1 \frac{v^2(r)}{r}\, dr, \qquad (3.28)$$

где

$$\rho(r) = \frac{2r\, \ln q}{\pi}\, \sin\frac{\pi \ln r}{\ln q}.$$

Постоянная $\pi^2/4$ в (3.28) является точной.

Теорема 3.5 ([8]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – двусвязная область с модулем $M(\Omega) < \infty$, g – однолистное конформное отображение Ω*

на кольцо $A(0;q,1) = \{\zeta \in \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\}$, $q = \exp(-2\pi M(\Omega))$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \geq$$

$$\geq \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{R^2(z,\Omega)} + \frac{1}{16M^2(\Omega)} \iint_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy, \qquad (3.29)$$

где $z = x + iy$. *Постоянная* $1/16$ *является точной.*

Доказательство теоремы 3.5. Рассмотрим вещественнозначную функцию $u \in C_0^1(A)$, где $A = A(0;q,1) = \{\zeta : q < |\zeta| < 1\}$. Пусть $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\theta}$. При любом фиксированном $\theta \in [0,2\pi]$ применим к функции u неравенство (3.28) по переменной $r = |\zeta|$, затем проинтегрируем по $\theta \in [0,2\pi]$. В результате будем иметь

$$\iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 rdrd\theta \geq \iint_A \frac{u^2}{\rho^2(r)} rdrd\theta + \frac{\pi^2}{4\ln^2 q} \iint_A \frac{u^2}{r^2} rdrd\theta,$$

где $A = A(0;q,1)$. Отсюда немедленно следует неравенство

$$\iint_A |\nabla u|^2 \, d\xi d\eta \geq$$

$$\geq \iint_A \frac{u^2}{R^2(\zeta,A)} d\xi d\eta + \frac{1}{16M^2(A)} \iint_A \frac{u^2}{|\zeta|^2} d\xi d\eta \qquad (3.30)$$

для кольца $A = A(0;q,1)$, так как $|\partial u/\partial r| \leq |\nabla u|$, конформный радиус вычисляется по формуле $R(\zeta, A(0;q,1)) = -\rho(|\zeta|)$ и модуль кольца $M(A(0;q,1)) = (2\pi)^{-1}\ln(1/q)$.

Для обоснования точности постоянной $1/16$ возьмем функции вида $u(\xi,\eta) \equiv v(r)$, где $v \in C_0^1(q,1)$. Легко видеть, что для таких функций точность $1/16$ в (3.30) равносильна точности второй постоянной $1/4$ в неравенстве (3.13) на множестве функций $v \in C_0^1(0,\pi)$. Этот факт верен, так как функция u_ε, использованная в лемме 3.3 при доказательстве точности констант, лежит в замыкании семейства $C_0^1(0,\pi)$ по норме $||v|| := \left(\int_0^\pi v'^2\, d\theta\right)^{1/2}$.

Доказываемое неравенство (3.29) получается из (3.30) заменой переменных $\zeta = g(z)$. Этим и завершается доказательство теоремы 3.5.

Теорема 3.6 ([9]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – двусвязная область гиперболического типа с модулем $M = M(\Omega) \in (0,\infty]$, g – однолистное конформное отображение области Ω на кольцо*

$$A(0;q,1) = \{\zeta \in \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\},$$

где $q = \exp(-2\pi M(\Omega)) \in [0,1)$.

Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2\, dxdy \geq$$

$$\geq \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy + \frac{1}{8M^2}\iint_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy, \qquad (3.31)$$

$$\iint_\Omega R(z,\Omega)|\Delta u|^2\, dxdy \geq$$

$$\geq \iint_\Omega |\nabla u|^2\, dxdy + \frac{1}{16M^2}\iint_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy, \qquad (3.32)$$

где $M = M(\Omega)$, $z = x + iy$. Если $M = M(\Omega) = \infty$, то в неравенствах (3.31) *и* (3.32) *полагаем, что $1/M^2 = 0$.*

Доказательство теоремы 3.6. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$ является вещественнозначной функцией. Пользуясь формулой Грина, так же, как и при доказательстве теоремы 3.3, мы показываем, что справедливо неравенство (3.32). Далее мы привлекаем неравенство

(3.29) теоремы 3.5. Нетрудно видеть, что неравенства (3.31) и (3.32) являются простыми следствиями системы неравенств (3.20) и (3.29).

Теорема 3.6 доказана.

Теорема 3.7 ([9]). *Для любой двусвязной области Ω гиперболического типа*

$$c_2^*(\Omega) = 1 \quad \textit{и} \quad c_2^{**}(\Omega) = 1.$$

А именно, если Ω – двусвязная область гиперболического типа, то имеют место неравенства (3.28) *и* (3.22), *и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $u_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, $u_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ такие, что имеют место неравенства* (3.23) *и* (3.24).

Доказательство теоремы 3.7. Пусть Ω – двусвязная область гиперболического типа. Фактически нам нужно доказать четыре следующих утверждения:

$$c_2^*(\Omega) \geq 1, \quad c_2^{**}(\Omega) \geq 1, \quad c_2^*(\Omega) \leq 1, \quad c_2^{**}(\Omega) \leq 1.$$

Неравенства $c_2^*(\Omega) \geq 1$ и $c_2^{**}(\Omega) \geq 1$ являются простыми следствиями (3.31) и (3.32) и определений констант как максимальных величин в соответствующих вариационных неравенствах.

Неравенства $c_2^*(\Omega) \leq 1$ и $c_2^{**}(\Omega) \leq 1$ докажем от противного.

Предположим, что $c_2^*(\Omega) > 1$ для некоторой двусвязной области гиперболического типа с модулем $M = M(\Omega) \in (0, \infty]$. Тогда

$$c_2^*(\Omega) = c_2^*(\Omega_q) > 1,$$

где $q = \exp(-2\pi M(\Omega)) \in [0, 1)$ и

$$\Omega_q = A(0; q, 1) = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}.$$

Следовательно, $c_2^*(\Omega_q) = 1 + \varepsilon_0 > 1$ и справедливо неравенство

$$\iint_{\Omega_q} R^2(z, \Omega_q) |\Delta u|^2 \, dx\, dy \geq (1 + \varepsilon_0) \iint_{\Omega_q} \frac{|u|^2 \, dx\, dy}{R^2(z, \Omega_q)} \tag{3.33}$$

для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega_q)$. Покажем, что это неравенство справедливо лишь при условии $\varepsilon_0 = 0$. С этой целью перейдем к полярным координатам и выберем функции $u \in C_0^\infty(\Omega_q)$, зависящие лишь от радиуса $r = |z| \in (q, 1)$, т. е. положим $u(z) \equiv \psi(|z|)$, где $\psi \in C_0^\infty(q, 1)$.

Будем пользоваться хорошо известными, явными формулами для коэффициента $\lambda_{\Omega_q}(z) = 1/R(z, \Omega_q$:

$$R(z, \Omega_q) =: \rho_q(|z|) = \frac{2\,|z|\, \ln(1/q)}{\pi}\, \sin \frac{\pi \ln |z|}{\ln q}, \quad q \in (0, 1),\ z \in \Omega_q,$$

$$R(z, \Omega_q) =: \rho_0(|z|) = 2\,|z|\, \ln(1/|z|), \quad q = 0,\ z \in \Omega_q.$$

Из формулы (3.33) следует: для любой функции $\psi \in C_0^\infty(q, 1)$

$$\int_q^1 \rho_q^2(r)\, \left|\psi''(r) + r^{-1}\psi'(r)\right|^2 r dr \geq (1 + \varepsilon_0) \int_q^1 \frac{\left|\psi(r)\right|^2}{\rho_q^2(r)} r dr. \tag{3.34}$$

Ясно, что неравенство должно выполняться и для любой функции ψ_{ab}, которая принадлежит замыканию семейства $C_0^\infty(q, 1)$ по норме

$$||\psi|| = \sqrt{\int_q^1 \rho_q^2(r)\, \left|\psi''(r) + r^{-1}\psi'(r)\right|^2 r dr} + \sqrt{\int_q^1 \frac{\left|\psi(r)\right|^2}{\rho_q^2(r)} r dr}.$$

Пусть параметры a и b удовлетворяют условиям

$$a \in (0, 1/2), \quad b \in (0, 1/3 - q/3).$$

И пусть ψ_{ab} – функция, определенная равенствами:

$\psi_{ab}(r) = (r-q)^2/b^2$ при $q < r < q+b$,

$\psi_{ab}(r) = 1$ при $q+b \le r \le 1-b$,

$\psi_{ab}(r) = (1-r)^{1/2+a}/b^{1/2+a}$ при $1-b < r < 1$.

Подставим $\psi(r) = \psi_{ab}(r)$ в неравенство (3.34), умножим обе части полученного неравенства на b и перейдем к пределу при $b \to 0$. Получим неравенство $X \ge (1+\varepsilon_0)Y$, где

$$X = \lim_{b\to 0} b \int_q^1 \rho_q^2(r) \, \left|\psi''_{ab}(r) + r^{-1}\psi'_{ab}(r)\right|^2 rdr =$$

$$= \lim_{b\to 0} b \int_{1-b}^1 \rho_q^2(r) \, \left|\psi''_{ab}(r) + r^{-1}\psi'_{ab}(r)\right|^2 rdr =$$

$$= \lim_{b\to 0} b \int_{1-b}^1 4(1-r)^2 \, \left|\psi''_{ab}(r) + r^{-1}\psi'_{ab}(r)\right|^2 rdr =$$

$$= \lim_{b\to 0} \frac{4(1/4-a^2)^2}{b^{2a}} \int_{1-b}^1 (1-r)^{-1+2a} dr = \frac{2(1/4-a^2)^2}{a},$$

$$Y = \lim_{b\to 0} b \int_q^1 \frac{\left|\psi_{ab}(r)\right|^2}{\rho_q^2(r)} rdr = \lim_{b\to 0} b \int_{1-b}^1 \frac{\left|\psi_{ab}(r)\right|^2}{4(1-r)^2} dr =$$

$$= \lim_{b\to 0} \frac{1}{4b^{2a}} \int_{1-b}^1 (1-r)^{-1+2a} dr = \frac{1}{8a}.$$

Следовательно, будем иметь $2(1/4-a^2)^2 a^{-1} \ge (1+\varepsilon_0)(8a)^{-1}$. Умножая обе части этого неравенства на $8a$ и переходя к пределу при $a \to 0$ получаем неравенство $1 \ge 1+\varepsilon_0$, которое противоречит нашему допущению $\varepsilon_0 > 0$. Следовательно, $c_2^*(\Omega) \le 1$ для любой двусвязной области гиперболического типа.

Предположим теперь, что $c_2^{**}(\Omega) > 1$ для некоторой двусвязной области с модулем $M = M(\Omega) \in (0, \infty]$. Тогда

$$c_2^{**}(\Omega) = c_2^{**}(\Omega_q) = 1 + \varepsilon_0 > 1,$$

где

$\Omega_q = A(0; q, 1) = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$,
$q = \exp(-2\pi M(\Omega)) \in [0, 1)$.

Поэтому справедливо неравенство

$$\iint_{\Omega_q} R^2(z, \Omega_q) |\Delta u|^2 \, dx \, dy \geq (1 + \varepsilon_0) \iint_{\Omega_q} |\nabla u|^2 \, dx \, dy \;\; \forall u \in C_0^\infty(\Omega_q).$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получаем, что для любой функции $\psi \in C_0^\infty(q, 1)$

$$\int_q^1 \rho_q^2(r) \left|\psi''(r) + r^{-1}\psi'(r)\right|^2 \, r dr \geq (1 + \varepsilon_0) \int_q^1 |\psi'(r)|^2 \, r dr.$$

Отсюда следует неравенство $X \geq (1 + \varepsilon_0) Y_1$, где

$$X = \lim_{b \to 0} b \int_q^1 \rho_q^2(r) \left|\psi''_{ab}(r) + r^{-1}\psi'_{ab}(r)\right|^2 \, r dr = \frac{2(1/4 - a^2)^2}{a},$$

$$Y_1 = \lim_{b \to 0} b \int_q^1 |\psi'_{ab}(r)|^2 \, r dr = \lim_{b \to 0} b \int_{1-b}^1 |\psi'_{ab}(r)|^2 \, dr = \frac{(1/2 + a)^2}{2a},$$

и поэтому

$$\frac{2(1/4 - a^2)^2}{a} \geq (1 + \varepsilon_0) \frac{(1/2 + a)^2}{2a},$$

Умножим обе части этого неравенства на $8a$ и перейдем к пределу при $a \to 0$. Получаемое неравенство $1 \geq 1 + \varepsilon_0$ противоречит допущению $\varepsilon_0 > 0$. Следовательно, $c_2^{**}(\Omega) \leq 1$ для любой двусвязной области гиперболического типа. Таким образом, теорема 3.7 доказана полностью.

3.4 Области произвольной связности

Напомним, что имеем равенство $M(\Omega) = M(\Pi)$ максимальных модулей для конформно эквивалентных областей Ω и Π. Следовательно, равномерная совершенность границы области является конформно инвариантным свойством. Следующее утверждение является простым следствием универсального неравенства (2.36), представленного теоремой 2.21.

Теорема 3.8 (см. [81] для $p = 2$, [8] для $p \in [1, \infty)$). *Пусть $p \in [1, \infty)$. Если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа с равномерно совершенной границей, то $c_p(\Omega) > 0$.*

Известно (см. [82]), что существуют области гиперболического типа, для которых $c_2(\Omega) = 0$, т. е. существуют области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, для которых соответствующее неравенство не является содержательным. Например, $c_2(\Omega) = 0$, если граница области состоит из конечного числа точек. Если $c_2(\Omega) = 0$ для некоторой области гиперболического типа, то граница такой области должна содержать не менее трех компонент.

Справедлив следующий аналог случая $p = 2$ теоремы 3.8.

Теорема 3.9 ([9]). *Если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа с равномерно совершенной границей, то $c_2^*(\Omega) > 0$ и $c_2^{**}(\Omega) > 0$.*

Доказательство теоремы 3.9. Для односвязных и двусвязных областей теорема 3.9 является простым следствием теорем 3.8 и 3.7. Поэтому будем считать, что граница области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет три или более граничных компонент и является равномерно совершенным множеством. Тогда $c_2(\Omega) > 0$ и для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ мы можем записать неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dx dy \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx dy + \frac{c_2(\Omega)}{2} \iint_\Omega |u|^2 / R^2(z, \Omega) dx dy. \qquad (3.35)$$

Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Пользуясь формулой Грина

$$\iint_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u \Delta u \right) \, dx \, dy = 0$$

и элементарным неравенством вида $2\,ab \le \alpha\, a^2 + b^2/\alpha$, где

$$\alpha = c_2(\Omega), \quad a = |u(z)|/R(z,\Omega), \quad b = |\Delta u(z)|\, R(z,\Omega),$$

получаем неравенство

$$\frac{1}{2\,c_2(\Omega)} \iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2\, dx\, dy + \frac{c_2(\Omega)}{2} \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)}\, dx\, dy \ge$$

$$\ge \iint_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dy.$$

Из этого неравенства и неравенства (3.35) следует, что для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2\, dx\, dy \ge c_2(\Omega) \iint_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dy. \tag{3.36}$$

По определению $c_2^*(\Omega)$ является максимальной константой в неравенстве такого вида. Поэтому (3.36) влечет оценку

$$c_2^*(\Omega) \ge c_2(\Omega), \tag{3.37}$$

следовательно, $c_2^*(\Omega) > 0$.

Применяя последовательно неравенства (3.3) и (3.2) в случае $p = 2$, получаем, что для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2 dx\, dy \ge c_2^*(\Omega) \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy \ge$$

$$\ge c_2(\Omega)\, c_2^*(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dx\, dy.$$

Отсюда с учетом определения константы $c_2^{**}(\Omega)$ будем иметь оценку

$$c_2^{**}(\Omega) \ge c_2(\Omega)\, c_2^*(\Omega). \tag{3.38}$$

Следовательно, $c_2^{**}(\Omega) > 0$.

Таким образом, теорема 3.9 доказана.

В следующем утверждении нам потребуется евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$.

Напомним, что граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является равномерно совершенной тогда и только тогда, когда $M_0(\Omega) < \infty$.

Нам потребуется следующее утверждение, которое также является следствием универсального неравенства, представленного теоремой 2.16, и оценки (2.20) характеристики $\alpha(\Omega)$.

Теорема 3.10 ([8], см. теорему 3 для случая $p = 2$, $\infty \notin \Omega$). *Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, граница которой имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной, то справедливо неравенство*

$$c_2(\Omega) \geq \frac{4\pi^4}{\left[4\pi^3 M_0(\Omega) + \Gamma^4(1/4)\right]^2}, \tag{3.39}$$

где Γ – гамма функция Эйлера, $M_0(\Omega)$ – евклидов максимальный модуль области Ω.

Справедлива

Теорема 3.11 ([9]). *Пусть граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является равномерно совершенной и содержит не менее трех компонент. Тогда справедливы оценки*

$$c_2^*(\Omega) \geq \frac{4\pi^4}{\left[4\pi^3 M_0(\Omega) + \Gamma^4(1/4)\right]^2}, \tag{3.40}$$

$$c_2^{**}(\Omega) \geq \frac{16\pi^8}{\left[4\pi^3 M_0(\Omega) + \Gamma^4(1/4)\right]^4}, \tag{3.41}$$

где Γ – гамма функция Эйлера, $M_0(\Omega)$ – евклидов максимальный модуль области Ω.

Доказательство теоремы 3.11. Очевидно, неравенство (3.40) является простым следствием оценок (3.37) и (3.39), а неравенство

(3.41) вытекает из оценок (3.38), (3.39) и (3.40). Таким образом, теорема 3.11 доказана.

Полагая $M_0(\Omega) = 0$ в оценках (3.40) и (3.41), получаем

Следствие 3.11.1 *Пусть граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является равномерно совершенной и содержит не менее трех компонент. Если $M_0(\Omega) = 0$, то для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства*

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2 dx\, dy \geq \frac{4\pi^4}{\Gamma^8(1/4)} \iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy,$$

$$\iint_\Omega R^2(z,\Omega)|\Delta u|^2 dx\, dy \geq \frac{16\pi^8}{\Gamma^{16}(1/4)} \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dx\, dy,$$

где $z = x + iy$, Γ – гамма функция Эйлера.

Существуют области Ω произвольной связности, обладающие свойством $M_0(\Omega) = 0$. Ряд примеров таких областей можно найти в статьях [52] и [53]. Приведем еще один пример бесконечносвязной области Ω_c, для которой евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega_c)$ равен нулю.

Пример 3.1 . *Пусть $\Pi = \{x + iy : |x| < 1, |y| < 2\}$ – прямоугольник, g_c – классическое канторово множество, лежащее на отрезке $[0,1]$ оси абсцисс.*

Определим компакт $G_c = \{x + iy : x \in g_c, -1 \leq y \leq 1\}$ и область $\Omega_c = \Pi \backslash G_c$. Имеем равенство $M_0(\Omega_c) = 0$, так как не существует окружности, лежащей в области Ω_c и разделяющей границу этой области.

Действительно, если окружность радиуса R содержит хотя бы одну граничную компоненту области Ω_c, то $R > 1$. Но такая окружность не может лежать внутри области $\Omega_c \subset \Pi$.

Правдоподобным является следующее утверждение: *если Ω – область гиперболического типа и ее граница является равномерно* *совершенным множеством, то* $c_p^*(\Omega) > 0$ *и* $c_p^{**}(\Omega) > 0$ *для любого* $p \in (1,\infty)$. Выше эти утверждения доказаны лишь для случая $p = 2$. Подтвердим эту гипотезу для $c_p^{**}(\Omega)$ при $p > 2$.

В следующем утверждении мы пользуемся стандартным обозначением: $C_0^m(\Omega)$ – семейство функций, имеющих непрерывные производные до порядка m и компактные носители.

Лемма 3.4 ([9]). *Предположим, что* $s \in [1,\infty)$ *и* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *– область. Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^2(\Omega)$ *имеют место неравенство*

$$\iint_\Omega |u|^s \, |\Delta u| \, dx \, dy \geq s \iint_\Omega |u|^{s-1} \, |\nabla u|^2 \, dx \, dy \tag{3.42}$$

и равенство

$$-\iint_\Omega |u(z)|^s \, \Delta u(z) \operatorname{sign} u(z) \, dx \, dy =$$

$$= s \iint_\Omega |u(z)|^{s-1} \, |\nabla u(z)|^2 \, dx \, dy. \tag{3.43}$$

Доказательство леммы 3.4. Пусть $u \in C_0^2(\Omega)$ – вещественнозначная функция. Предположим сначала, что $s \in (1,\infty)$. Определим функцию v равенством:

$$v(z) = |u(z)|^s \operatorname{sign} u(z), \quad z \in \Omega.$$

С учетом неравенства $s > 1$ и тождества

$$\nabla v(z) \equiv s \, |u(z)|^{s-1} \, \nabla v(z)$$

получаем, что $v \in C_0^1(\Omega)$. Применяя к паре функций $\{u, v\}$ формулу Грина

$$\iint_\Omega \left[v \, \Delta u + (\nabla v, \nabla u) \right] \, dx \, dy = 0,$$

для $v(z) = |u(z)|^s \operatorname{sign} u(z)$ будем иметь равенство (3.43).

Очевидно, равенство (3.43) влечет неравенство (3.42).

Итак, утверждение леммы доказано для случая, когда параметр $s > 1$.

Переходя к пределу при $s \to 1$ в (3.42) и (3.43) и пользуясь теоремой Лебега о мажорированной сходимости, получаем, что неравенство (3.42) и равенство (3.43) имеют место и для $s = 1$.

Лемма 3.4 доказана

Отметим, что неравенство (3.42) и равенство (3.43) являются конформно инвариантными, т. е. имеют тот же вид при конформной замене независимой переменной.

Обобщением теоремы 3.9 является

Теорема 3.12 ([9]). *Пусть $p \in [2, \infty)$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа, $z = x + iy$. Если граница этой области является равномерно совершенной, то*

$$c_p^{**}(\Omega) \geq 4^p(p-1)^p c_2^p(\Omega)/p^{2p} > 0.$$

Поэтому для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint_\Omega R^{2p-2}(z,\Omega)|\Delta u|^p dx\, dy \geq$$

$$\geq \frac{4^p(p-1)^p c_2^p(\Omega)}{p^{2p}} \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)} dx\, dy. \tag{3.44}$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $2 < p < \infty$, так как для $p = 2$ утверждение уже доказано ранее. Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ – фиксированная вещественнозначная функция, $u \not\equiv 0$. Подставляя $|u|^{p/2} \in C_0^1(\Omega)$ вместо u в формуле

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dy \geq c_2(\Omega) \iint_\Omega \frac{u^2}{R^2(z,\Omega)} dx\, dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

получим

$$\iint_\Omega |u|^{p-2}\,|\nabla u|^2 dx\,dy \geq \frac{4\,c_2(\Omega)}{p^2}\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)}dx\,dy. \qquad (3.45)$$

Применяя (3.42) при $s = p-1$ и формулу (3.45), приходим к неравенству

$$\iint_\Omega |u|^{p-1}|\Delta u|dxdy \geq \frac{4(p-1)c_2(\Omega)}{p^2}\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy.$$

Оценивая сверху интеграл от произведения $|u|^{p-1}|\Delta u| = fg$, где

$$f(z) \equiv R^{2/p-2}(z,\Omega)\,|u(z)|^{p-1}, \qquad g(z) \equiv R^{2-2/p}(z,\Omega)|\Delta u(z)|,$$

с помощью неравенства Гельдера с показателями $p/(p-1)$ и p, будем иметь

$$\left(\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy\right)^{1-1/p}\left(\iint_\Omega R^{2p-2}(z,\Omega)|\Delta u|^p dxdy\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \frac{4(p-1)c_2(\Omega)}{p^2}\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)}dxdy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega). \qquad (3.46)$$

Легко видеть, что (3.45) и (3.46) влекут неравенство (3.44). Следовательно, $c_p^{**}(\Omega) \geq 4^p(p-1)^p c_2^p(\Omega)/p^{2p} > 0$ для $p \in [2,\infty)$ с учетом определения постоянной $c_p^{**}(\Omega)$ как максимальной константы в неравенстве (3.4). Таким образом, теорема 3.12 доказана.

Напомним, что по формуле Элстродта-Паттерсона-Сулливана ([117], с. 333):

$$c_2(\Omega) = \left\{1 \text{ для } 0 \leq \beta \leq 1/2; \quad 4\beta\,(1-\beta) \text{ для } 1/2 \leq \beta \leq 1\right\},$$

где $\beta = \beta(\Omega)$ – критический показатель сходимости рядов Пуанкаре–Дирихле для фундаментальной группы преобразований Ω.

Из этой формулы следует, в частности, что $c_2(\Omega) \leq 1$ для любой области гиперболического типа. По-видимому, справедливы и два следующих утверждения: $c_2^*(\Omega) \leq 1$, $c_2^{**}(\Omega) \leq 1$ для любой области гиперболического типа.

3.5 Изопериметрический профиль

Существенную роль в этом пункте играет подход Федерера-Флеминга [80] и Й. Чигера [77], развитый в работах ряда авторов, в частности, в статьях С. Г. Бобкова и Х. Хундре [72], В. М. Миклюкова и М. Вуоринена [98]. Речь идет о подходе, связанном с неевклидовыми изопериметрическими неравенствами и изопериметрическим профилем области. Отметим, что классическое евклидово изопериметрическое неравенство можно записать в виде формулы $2\sqrt{\pi S_e(\Omega)} \leq L_e(\partial\Omega)$, что соответствует изопериметрическому профилю $\theta_e(t) = 2\sqrt{\pi t}$.

Пусть Ω – область гиперболического типа на расширенной плоскости, и пусть $A : \Omega \to (0, \infty)$, $B : \Omega \to (0, \infty)$ – некоторые непрерывные функции. Рассмотрим фиксированные параметры p и q, удовлетворяющие условию: $1 < p \leq q < \infty$. На множестве областей $G \subset \Omega$, таких, что граница ∂G состоит из кусочно-гладких кривых и $\overline{G} \subset \Omega$, определим взвешенную площадь

$$S(G) = \iint\limits_G A(z)^q dxdy$$

и взвешенную длину

$$L(\partial G) = \int\limits_{\partial G} B(z)A(z)^{(p-1)q/p}|dz|.$$

Изопериметрический профиль плоской области Ω является наилучшей (максимальной) функцией

$$\theta : [0, S(\Omega)) \to [0, \infty), \quad \theta(0) = 0,$$

удовлетворяющей следующему соотношению

$$\theta(S(G)) \le L(\partial G)$$

для любой допустимой области G, т. е. для любой области с кусочно-гладкой границей и такой, что $\overline{G} \subset \Omega$.

Далее рассматриваются лишь изопериметрические профили специального вида. А именно, следуя В. М. Миклюкову и М. Вуоринену [98]), будем предполагать конечность величины $\mu(p, q)$, определяемой равенством

$$\mu(p, q) := \sup_{r \in (0, S(\Omega))} r^{1/q} \left(\int_r^{S(\Omega)} \theta(t)^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p}.$$

Приведем теорему Миклюкова-Вуоринена с некоторыми изменениями и лишь в той общности, которая необходима для нас.

Теорема 3.13 (см. [98]). *Пусть $1 < p \le q < \infty$, и пусть Ω – область гиперболического типа на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Если для области Ω существует изопериметрический профиль, удовлетворяющий соотношению $\mu(p, q) < \infty$, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство*

$$\left(\iint_\Omega |A(z) u(x)|^q \, dxdy \right)^{1/q} \le \lambda \left(\iint_\Omega (B(z) |\nabla u(x)|)^p \, dxdy \right)^{1/p},$$

где λ – положительная постоянная, для которой справедливы *оценки:*

$$\mu(p,q) \le \lambda \le \mu(p,q)\ q^{1/q} \left(\frac{q}{q-1}\right)^{(p-1)/p}.$$

Доказательство теоремы 3.13. Используется схема доказательства, впервые примененная в статье Флеминга и Федерера [80]. Берем произвольную фиксированную функцию $u \in C_0^1(\Omega)$. Можно считать, что $\nabla u(z) \neq 0$ на множестве $\{z \in \Omega : |u(z)| > 0\}$, исключая разве лишь конечное число точек. Введем обозначения

$$E_t = \{z \in \Omega : |u(z)| = t\}, \quad \Omega_t = \{z \in \Omega : |u(z)| > t\}.$$

Тогда на основании формулы Кронрода-Федерера для ко-площади справедливо тождество

$$I(t) := \iint_{\Omega_t} A^q(z)dxdy = \int_t^\infty d\tau \int_{E_\tau} \frac{A^q(z)}{|\nabla u(z)|}|dz|.$$

Отсюда следует, что для почти всех $t \ge 0$ имеет место равенство

$$I'(t) = -\int_{E_t} \frac{A^q(z)}{|\nabla u(z)|}|dz|.$$

Пусть $\tau : [0, I_\Omega) \to [0,\infty)$ – функция, обратная к функции $I(\tau)$. С учетом равенства для $I'(\tau)$ получаем

$$\iint_\Omega A^q(z)|u(z)|^q dxdy = \int_0^{I_\Omega} \tau^q(I)dI, \tag{3.47}$$

так как

$$\iint_\Omega A^q(z)|u(z)|^q dxdy = \int_0^\infty \tau^q d\tau \int_{E_\tau} A^q(z)|dz| = -\int_0^\infty \tau^q I'(\tau)d\tau.$$

Справедливо неравенство

$$\int_{E_t} B^p(z)|\nabla u(z)|^{p-1}|dz| \geq \frac{\left(\int_{E_t} B(z)A^{(p-1)q/p}(z)|dz|\right)^p}{|I'(t)|^{p-1}}, \tag{3.48}$$

так как в силу неравенства Гёльдера

$$\left(\int_{E_t} B(z)A^{(p-1)q/p}(z)|dz|\right)^p \leq$$

$$\leq \int_{E_t} B^p(z)|\nabla u(z)|^{p-1}|dz| \left(\int_{E_t} \frac{A^q(z)}{|\nabla u(z)|}|dz|\right)^{p-1}.$$

Поскольку $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, то $\overline{\Omega}_t \subset \Omega$. Следовательно, из определения изопериметрического профиля следует, что

$$\theta(I(t)) \leq \int_{E_t} B(z)A^{(p-1)q/p}(z)|dz|.$$

Учитывая формулу (3.48), получаем

$$\frac{\theta^p(I(t))}{|I'(t)|^{p-1}} \leq \int_{\Omega_t} B^p(z)|\nabla u(z)|^{p-1}|dz|. \tag{3.49}$$

Применяя снова формулу для ко-площади, будем иметь

$$\iint_{\Omega} B^p(z)|\nabla u(z)|^p dxdy = \int_0^\infty d\tau \int_{E_\tau} B^p(z)|\nabla u(z)|^{p-1}|dz|.$$

Тогда неравенство (3.49) запишется в виде

$$\iint_{\Omega} B^p(z)|\nabla u(z)|^p dxdy \geq \int_0^\infty \frac{\theta^p(I(\tau))d\tau}{|I'(\tau)|^{p-1}} = \int_0^{I_\Omega} \theta^p(I)|\tau'(I)|^p dI.$$

Это соотношение и формула (3.47) приводят к финальному неравенству

$$\frac{\left(\iint_\Omega B^p(z)|\nabla u(z)|^p dxdy\right)^{1/p}}{\left(\iint_\Omega A^q(z)|u(z)|^q dxdy\right)^{1/q}} \ge \frac{1}{\lambda} := \inf \frac{\left(\int_0^{I_\Omega} \theta^p(I)|\tau'(I)|^p dI\right)^{1/p}}{\left(\int_0^{I_\Omega} \tau^q(I)dI\right)^{1/q}},$$

где точная нижняя граница берется по всем абсолютно непрерывным невозрастающим функциям $\tau(I) \not\equiv 0$, что $\tau(I_\Omega) = 0$. Двусторонние неравенства для величин λ и $\mu(p,q)$ справедливы в силу известных весовых обобщений одномерных неравенств Харди (см., например, монографию В. Г. Мазьи [31]). Теорема доказана.

Обозначим

$$h(\Omega) = \sup_G \iint_G \frac{1}{R^2(z,\Omega)} dxdy \left(\int_{\partial G} \frac{1}{R(z,\Omega)}|dz|\right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G, ограниченным кусочно-гладкими кривыми, и таким, что $\overline{G} \subset \Omega$.

Следуя статье автора, Р. Г. Насибуллина и И. К. Шафигуллина [15], определим конформно инвариантный функционал $c_{p,q}(\Omega)$ как максимальную из возможных постоянных в следующем неравенстве типа Харди для вещественнозначных функций $u \in C_0^1(\Omega)$

$$\left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)}\right)^{1/p} \ge c_{p,q}(\Omega) \left(\iint_\Omega \frac{|u|^q dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{1/q}, \qquad (3.50)$$

где $1 < p, q < \infty$, $z = x+iy$, ∇u – градиент функции u. Таким образом, рассматриваемый нами функционал $c_{p,q}(\Omega)$ определяется формулой $c_{p,q}(\Omega) =$

$$= \inf_{u \in C_0^1(\Omega),\, u \not\equiv 0} \left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)}\right)^{1/p} \left(\iint_\Omega \frac{|u|^q dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{-1/q}. \qquad (3.51)$$

Отметим, что Фернандес [81], а также Фернандес и Родригес [82] рассматривают частный случай неравенства (3.50), соответствующий случаю $p = q = 2$, а именно, неравенство

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \geq c_2(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.52}$$

где

$$c_2(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega),\, u \not\equiv 0} \iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \left(\iint_\Omega \frac{|u|^2}{R^2(z,\Omega)} dxdy \right)^{-1}. \tag{3.53}$$

Очевидно, $c_2(\Omega) = c_{2,2}^2(\Omega)$. Ключевым результатом статьи [82] Фернандеса и Родригеса являются оценки

$$1/\left(2h(\Omega)\right)^2 \leq c_2(\Omega) \leq 3/h(\Omega).$$

Отметим, что Альварес, Пестана и Родригес [49] доказали ряд интересных утверждений, обобщающих и усиливающих соответствующие результаты из [82]. Здесь эти обобщения и усиления не рассматриваются.

Ниже обсуждается вопрос о том, что конечность величины

$$h_{p,q}(\Omega) = \sup_G \left(\iint_G \frac{1}{R^2(z,\Omega)} dxdy \right)^{1/q-1/p+1} \left(\int_{\partial G} \frac{1}{R(z,\Omega)} |dz| \right)^{-1}$$

при условии $1/p - 1/2 \leq 1/q \leq 1/p \leq 1$ влечет положительность константы $c_{p,q}(\Omega)$. Приведем сначала теорему сравнения констант $c_p(\Omega)$ для различных p.

Теорема 3.14 ([15]). *Пусть $1 \leq p \leq r < \infty$, и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа. Тогда*

$$c_r(\Omega) \geq p^r \left[c_p(\Omega)\right]^{r/p} / r^r. \tag{3.54}$$

Доказательство теоремы 3.14. При $p = r$ соотношение (3.54) является равенством. Поэтому рассмотрим лишь случай, когда $p < r$. Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, и пусть $1 \le p < r < \infty$. Определим функцию $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ равенством $\varphi(z) \equiv |u(z)|^{r/p}$, $z = x + iy \in \Omega$. Очевидно, $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Имеем

$$\nabla\varphi(z) = (r/p)|u(z)|^{r/p-1}(\operatorname{sign} u(z))\nabla u(x).$$

Так как $r/p-1 > 0$ и функция $u \in C_0^1(\Omega)$, то функция φ является непрерывно дифференцируемой в точках $z \in \Omega$, где $u(z) \neq 0$. Если же $u(z_0) = 0$ в точке $z_0 \in \Omega$, то ясно, что $\nabla\varphi(z_0) = 0$ и $\lim_{z\to z_0} \nabla\varphi(z) = 0$ с учетом неравенства $r/p - 1 > 0$. Поэтому имеем: $\varphi = |u|^{r/p} \in C_0^1(\Omega)$. Применяя к функции φ неравенство (3.52), получаем

$$\frac{r^p}{p^p}\iint_\Omega \frac{|u|^{r-p}|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}dxdy \ge c_p(\Omega)\iint_\Omega \frac{|u|^r}{R^2(z,\Omega)}dxdy, \quad u \in C_0^1(\Omega).$$

Оценим сверху интеграл из левой части, полагая

$$p_1 = \frac{r}{r-p},\ p_2 = \frac{r}{p},\ f_1 = \frac{|u|^{r-p}}{R^{2-2p/r}},\ f_2 = \frac{|\nabla u|^p}{R^{2p/r-p}},$$

и применяя неравенство Гёльдера

$$\iint_\Omega f_1 f_2 dxdy \le \left(\iint_\Omega f_1^{p_1} dxdy\right)^{1/p_1}\left(\iint_\Omega f_2^{p_2} dxdy\right)^{1/p_2}.$$

В результате будем иметь неравенство

$$\frac{r^p}{p^p}\left(\iint_\Omega \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{1-p/r}\left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)}\right)^{p/r} \ge c_p(\Omega)\iint_\Omega \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)}.$$

Так как $u \in C_0^1(\Omega)$ и $u \not\equiv 0$, то это неравенство равносильно следующему

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)} \geq \frac{p^r[c_p(\Omega)]^{r/p}}{r^r} \iint_\Omega \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),\ u \not\equiv 0.$$

Отсюда и следует неравенство (3.54), так как с учетом определения (3.51) при $r = p$ константа $c_r(\Omega)$ является максимально возможной постоянной в неравенстве

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^r dxdy}{R^{2-r}(z,\Omega)} \geq c_r(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^r dxdy}{R^2(z,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Этим и завершается доказательство теоремы 3.14.

Следующие два утверждение являются обобщениями теоремы из упомянутой выше статьи [82]. Напомним, что величины $c_p(\Omega)$ и $c_{p,q}(\Omega)$ сравнимы с константой $c_2(\Omega)$ при условии $p = q = 2$. В частности, при $p = 2$ следующая теорема 3.15 совпадает с одной из теорем статьи [82].

Теорема 3.15 ([82], [15]). *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа с коэффициентом линейного изопериметрического неравенства, определенным равенством*

$$h(\Omega) = \sup_G \iint_G R^{-2}(z,\Omega)dxdy \left(\int_{\partial G} R^{-1}(z,\Omega)|dz|\right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G, компактно вложенным в область Ω и ограниченным кусочно-гладкими кривыми.

Справедливы следующие утверждения.

1) Если $h(\Omega) < \infty$, то постоянная $c_p(\Omega)$ является положительным числом для любого $p \in [1,\infty)$ и имеет место оценка $c_p(\Omega) \geq 1/\left(ph(\Omega)\right)^p$.

2) При любом $p \in [1,2]$ постоянная $c_p(\Omega)$ является положительным числом тогда и только тогда, когда $h(\Omega) < \infty$. Кроме *того, справедливы оценки*

$$\frac{1}{h^p(\Omega)} \le p^p c_p(\Omega) \le \frac{12^{p/2}}{h^{p/2}(\Omega)}.$$

Доказательство теоремы 3.15. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Предположим, что $p \in (1, \infty)$ и $h(\Omega) < \infty$. В силу определения конформно инвариантной константы $h(\Omega)$ для любой области G, компактно вложенной в Ω и ограниченной кусочно-гладкими кривыми, будем иметь

$$S(G) := \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \le h(\Omega) \int_{\partial G} \frac{ds}{R(z,\Omega)}. \tag{3.55}$$

Далее мы применяем теорему В. М. Миклюкова и М. Вуоринена, полагая $q = p \in (1, \infty)$, $A(z) = R^{-2/p}(z,\Omega)$, $B(z) = R^{-2/p+1}(z,\Omega)$. Из определения изопериметрического профиля области Ω следует, что профиль удовлетворяет неравенству $\theta(t) \ge t/h(\Omega)$ для любого $t \in (0, I_p)$, где $I_p = \sup_G S(G)$. Поэтому

$$\mu := \sup_{r \in (0, I_p)} r^{1/p} \left(\int_r^{I_p} \theta(t)^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} \le$$

$$\le h(\Omega) \sup_{r \in (0,\infty)} r^{1/p} \left(\int_r^{\infty} t^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} = h(\Omega)\,(p-1)^{1-1/p}.$$

Последнее равенство получено с помощью непосредственных вычислений. В силу теоремы Миклюкова-Вуоринена, применяемой для $q = p \in (1, \infty)$, имеем неравенство

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)} \ge \lambda^{-p} \iint_\Omega \frac{|u|^p dxdy}{R^2(z,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.56}$$

где постоянная λ удовлетворяет неравенству

$$\lambda \leq \mu\, p^{1/p} \left(p/(p-1)\right)^{(p-1)/p} \leq p\, h(\Omega). \tag{3.57}$$

Постоянная $c_p(\Omega)$ определена как максимальная постоянная в неравенстве вида (3.56). Следовательно, $c_p(\Omega) \geq \lambda^{-p}$. Эта оценка вместе с оценкой (3.57) приводит к неравенству

$$c_p(\Omega) \geq 1/\left(p\, h(\Omega)\right)^p > 0.$$

Тем самым первое утверждение теоремы доказано для любого $p \in (1, \infty)$. Остается рассмотреть случай, когда $p = 1$.

Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ – фиксированная функция. Для этой функции при любом $p \in (1, \infty)$ будет справедливо неравенство (3.56) с постоянной λ, удовлетворяющей оценке (3.57). Поскольку интегралы в неравенствах (3.56) непрерывно зависят от параметра $p \in (1, \infty)$ для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$, то мы можем перейти к пределу при $p \to 1$. Очевидно, предельный переход в (3.56) и (3.57) при $p \to 1$ приводит к оценке $c_1(\Omega) \geq 1/h(\Omega) > 0$ с учетом определения $c_1(\Omega)$ как максимальной постоянной в соответствующем неравенстве.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Предположим, что $p \in [1, 2]$. Если $h(\Omega) < \infty$, то положительность $c_p(\Omega)$ и нижняя оценка для этой величины вытекают из первого утверждения теоремы. Предположим теперь, что $c_p(\Omega) > 0$ для фиксированного $p \in [1, 2]$.

Если $p = 2$, то неравенство $h(\Omega) < \infty$ и верхняя оценка $c_2(\Omega) \leq 3/h(\Omega)$ доказаны Фернандесом и Родригесом [82]. Пусть теперь $p \in [1, 2)$ и $c_p(\Omega) > 0$. Применяя оценку (3.54) теоремы 3.14 при $r = 2$, имеем: $c_2(\Omega) \geq p^2 \left[c_p(\Omega)\right]^{2/p}/4 > 0$, далее $h(\Omega) < \infty$ и $c_p(\Omega) \leq \left(4c_2(\Omega)/p^2\right)^{p/2} \leq \left(12/(h(\Omega)p^2)\right)^{p/2}$.

Таким образом, теорема 3.15 доказана полностью. Следующая теорема обобщает первое утверждение теоремы 3.15.

Теорема 3.16 ([15]). *Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа, числа $p \in [1, \infty)$ и $q \in [1, \infty)$ фиксированы и удовлетворяют неравенствам $1/p - 1/2 \le 1/q \le 1/p$, величина $h_{p,q}(\Omega)$ определена равенством:*

$$h_{p,q}(\Omega) = \sup_G \left(\iint_G R^{-2}(z, \Omega) dxdy \right)^{1/q - 1/p + 1} \left(\int_{\partial G} R^{-1}(z, \Omega) |dz| \right)^{-1},$$

где точная верхняя граница берется по всем областям G, компактно вложенным в область Ω и ограниченным кусочно-гладкими кривыми.

Если $h_{p,q}(\Omega) < \infty$, то константа $c_{p,q}(\Omega)$ является положительным числом. Кроме того, имеют место оценки:

$$c_{p,q}(\Omega) \ge \frac{q^{1/p - 1/q - 1}}{h_{p,q}(\Omega)} \left(\frac{p(q-1)}{q(p-1)} \right)^{(p-1)/p} \quad \text{для случая} \quad p > 1,$$

$$c_{1,q}(\Omega) \ge \frac{1}{q^{1/q} h_{1,q}(\Omega)} \quad \text{для случая} \quad p = 1.$$

Доказательство теоремы 3.16. Мы применяем тот же метод, который был использован при доказательстве предыдущей теоремы. Определим функции $A : \Omega \to (0, \infty)$ и $B : \Omega \to (0, \infty)$ равенствами $A(z) = R^{-2/q}(z, \Omega)$ и $B(z) = R^{-2/p+1}(z, \Omega)$, где $z \in \Omega$.

Пусть G – область, ограниченная кусочно-гладкой кривой и удовлетворяющая условию $\overline{G} \subset \Omega$. Пользуясь определениями В. М. Миклюкова и М. Вуоринена для выбранных нами функций $A(z)$ и $B(z)$, получаем следующие формулы для взвешенной площади области

$$S(G) = \iint_G A(z)^q dxdy = \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z, \Omega)}$$

и взвешенной длины границы

$$L(\partial G) = \int_{\partial G} B(z) A(z)^{(p-1)q/p} |dz| = \int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z, \Omega)}.$$

В силу условий теоремы для любой допустимой области имеем неравенство $S^{\beta}(G) \leq h_{p,q}(\Omega) L(\partial G)$, где величина $h_{p,q}(\Omega) < \infty$, а число $\beta := 1/q - 1/p + 1 \in [1/2, 1]$. С другой стороны, изопериметрический профиль $\theta : [0, S(\Omega)) \to [0, \infty), \quad \theta(0) = 0$, области Ω является максимальной функцией, удовлетворяющей неравенству $\theta(S(G)) \leq L(\partial G)$ на множестве всех допустимых областей G. Следовательно, $\theta(t) \geq t^{\beta}/h_{p,q}(\Omega)$.

Предположим, что $p \in (1, \infty)$, $I_p = \sup_G S(G)$, и применим теорему Миклюкова-Вуоринена. Так как

$$\beta p/(p-1) = 1 + p/(q(p-1)),$$

то для любого положительного числа r

$$\left(\int_r^{\infty} t^{-\beta p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} = (q(1-1/p))^{(p-1)/p} \frac{1}{r^{1/q}}.$$

Характеристика Миклюкова-Вуоринена $\mu(p, q)$ допускает оценку

$$\mu(p,q) \leq \sup_{r \in (0, I_p)} r^{1/q} \left(\int_r^{I_p} \theta(t)^{-p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} \leq$$

$$\leq h_{p,q}(\Omega) \sup_{r \in (0,\infty)} r^{1/q} \left(\int_r^{\infty} t^{-\beta p/(p-1)} dt \right)^{(p-1)/p} =$$

$$= h_{p,q}(\Omega) \left(\frac{q(p-1)}{p} \right)^{(p-1)/p}.$$

Следовательно, имеет место следующее неравенство

$$\left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{2-p}(z,\Omega)}\right)^{1/p} dxdy \geq \frac{1}{\lambda}\left(\iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2(z,\Omega)} dxdy\right)^{1/q} \qquad (3.58)$$

для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$. Константа λ в неравенстве (3.58) удовлетворяет соотношению

$$\lambda \leq \mu(p,q) q^{1/q} \left(\frac{q}{q-1}\right)^{(p-1)/p} \leq$$

$$\leq h_{p,q}(\Omega) q^{1/q-1/p+1} \left(\frac{q(p-1)}{p(q-1)}\right)^{(p-1)/p}. \qquad (3.59)$$

Поскольку постоянная $c_{p,q}(\Omega)$ определена как максимальная в неравенстве вида (3.58), то имеет место оценка $c_{p,q}(\Omega) \geq \lambda^{-1}$. Привлекая оценку (3.59), получаем доказываемое неравенство для $c_{p,q}(\Omega)$ в случае $p > 1$.

Случай $p = 1$ получается предельным переходом так же, как и при доказательстве первого утверждения предыдущей теоремы, так как в неравенствах (3.58) и (3.59) можно перейти к пределу при $p \to 1$ для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$. Таким образом, теорема 3.16 доказана полностью.

Приведем одно следствие теоремы 3.16, соответствующее случаю $p = 1$.

Следствие 3.16.1 ([15]). *Предположим, что $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ – область гиперболического типа. Если $1 \leq q \leq 2$ и $h_{1,q}(\Omega) < \infty$, то*

$$h_{1,q}(\Omega) q^{1/q} \iint_\Omega \frac{|\nabla u| dxdy}{R(z,\Omega)} \geq \left(\iint_\Omega \frac{|u|^q dxdy}{R^2(z,\Omega)}\right)^{1/q} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

В теореме 3.16 параметры $p \in [1,\infty)$ и $q \in [1,\infty)$ фиксированы и удовлетворяют неравенствам $1/p - 1/2 \leq 1/q \leq 1/p$. Как следствие получаем, что $\beta := 1/q - 1/p + 1 \in [1/2,\, 1]$. Такой выбор ограничений на параметры p и q обусловлен тем, что для заданной области неравенство $h_{p,q}(\Omega) < \infty$ может выполняться не для всех значений параметров, удовлетворяющих условию $1 \le p \le q < \infty$.

Нетрудно показать, что $h_{p,q}(\Omega) = \infty$ для любой односвязной области Ω гиперболического типа при условии $\beta \notin [1/2, 1]$.

3.6 Метрика Пуанкаре при $n \ge 3$

Для формирования конформно инвариантных интегралов пользуемся гиперболическим радиусом $R(x, \Omega)$, т. е. вещественно аналитической функцией $R(., \Omega) : \Omega \to (0, \infty)$, определяемой для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ как минимальное положительное решение уравнения Лиувилля

$$R(x, \Omega)\Delta R(x, \Omega) = \frac{n}{2}|\nabla R(x, \Omega)|^2 - 2n \tag{3.60}$$

с граничным условием $R(x, \Omega)|_{\partial\Omega} = 0$.

Если $n \ge 3$, то наиболее известной является следующая равносильная форма уравнения Лиувилля $\Delta V = n(n-2)V^{\frac{n+2}{n-2}}$, где $V = V(x) :\equiv R^{1-n/2}(x, \Omega)$.

Термин гиперболический радиус предложен в статье [68]. При $n \ge 3$ описание всего семейства областей гиперболического типа остается открытой проблемой, но области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкими границами являются областями гиперболического типа (см. Лёвнер и Ниренберг [96], а также Бэндл и Флучер [68]). Метрика $ds^2 = |dx|^2/R^2(x, \Omega)$ является конформно плоской и превращает область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в риманово многообразие с постоянной отрицательной скалярной кривизной, равной $Sc = -4n(n-1)$ (см. [19] и [68]).

Для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $(\Omega \ne \mathbb{R}^2)$ гиперболический радиус идентичен классическому конформному радиусу, а также гармоническому радиусу области в заданной точке. Имеются аналоги этого факта и для пространственных областей (см. [68]). И при $n \geq 3$, как и в случае $n = 2$, области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, для которых корректно определен гиперболический радиус, будем называть областями гиперболического типа.

Известно (см., например, [47] или [64] для случая $n = 2$ и [68] в общем случае), что для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ гиперболического типа

$$R(x,\Omega) \geq \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) := \inf_{y\in\partial\Omega} |x-y| \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.61}$$

а для выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ гиперболического типа

$$\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \leq R(x,\Omega) \leq 2\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.62}$$

Опишем кратко основные результаты Лёвнера и Ниренберга о гиперболическом радиусе для пространственной области произвольного вида.

Отметим прежде всего, что конформно инвариантная метрика Пуанкаре для шара, полупространства или внешности шара была известна ранее, благодаря работам Клейна и Пуанкаре. Лёвнер и Ниренберг ставят задачу построения аналогичной метрики для пространственной области произвольного вида. Аналогия с метрикой для единичного шара и требование конформной инвариантности приводят к тому, что конформно инвариантная метрика в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ с дифференциальным элементом квадрата длины $ds^2 = |dx|^2/R^2(x,\Omega)$ может быть построена при условии, что существует функция $V : \Omega \to (0,\infty)$, $V = V(x) :\equiv R^{1-n/2}(x,\Omega)$, определяемая как максимальное решение уравнения

$$\Delta V = n(n-2)V^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad x \in \Omega, \tag{3.63}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{x \to y} V(x, \Omega) = +\infty \qquad \forall y \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}. \tag{3.64}$$

В [96] сначала рассматриваются "регулярные" области, а именно, области, граница которых состоит из конечного числа гладких $(n-1)$-мерных гиперповерхностей класса C^∞. Доказывается, что для любой "регулярной" области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ существует максимальное решение $V = V(., \Omega) \in C^\infty(\Omega)$ уравнения (3.63), удовлетворяющее граничному условию (3.64).

Произвольная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ может быть представлена как объединение "регулярных" областей $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad \overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}.$$

Нетрудно доказывается, что функция, определяемая равенством

$$V = V(x, \Omega) := \lim_{j \to \infty} V(x, \Omega_j) \tag{3.65}$$

является неотрицательным максимальным решением уравнения (3.63). Но остается вопрос о выполнении граничного условия (3.64) для функции, определенной равенством (3.65). Лёвнер и Ниренберг дают частичный ответ и на этот вопрос. Приведем некоторые результаты.

Следуя Лёвнеру и Ниренбергу [96], компактное подмножество $\Gamma \subset \partial\Omega$ назовем регулярным, если $\lim_{x \to y} V(x, \Omega) = +\infty$ для любой точки $y \in \Gamma$. В статье [96] доказаны, в частности, два следующих утверждения.

Теорема 3.17 *Предположим, что* $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– область, множество* $\Gamma \subset \partial\Omega$, *а также множество* $(\partial\Omega) \setminus \Gamma$ *являются компактами. Необходимое и достаточное условие для* Γ *быть регулярным подмножеством состоит в следующем.*

Существует такая открытая окрестность U множества Γ, что существует функция $\psi : U \cap \Omega \to (0, \infty)$, удовлетворяющая условиям: $\psi \in C^2(U \cap \Omega)$, $\lim_{x \to y} \psi(x) = +\infty$ для любой точки $y \in \Gamma$ и справедливо неравенство

$$\Delta\psi(x) - n(n-2)\psi^{(n+2)/(n-2)}(x) \geq 0 \quad \forall x \in U \cap \Omega.$$

Теорема 3.18 *Предположим, что $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, множество $\Gamma \subset \partial\Omega$, а также множество $(\partial\Omega) \setminus \Gamma$ являются компактами. Если мера Хаусдорфа множества Γ меньше, чем $n/2 - 1$, то Γ не является регулярным подмножеством.*

Очевидно, из этой теоремы вытекает, что при $n \geq 3$ шар с выколотым центром не является областью гиперболического типа.

Отметим также, что ряд интересных утверждений о гиперболическом радиусе читатель найдет в статье К. Бэндла и М. Флучера [68]. В частности, в этой статье описаны связи гармонического и гиперболического радиусов и указан ряд открытых проблем.

3.7 Неравенства в областях из $\mathbb{R}^n$

Через Δu и ∇u обозначаем, соответственно, евклидов лапласиан и градиент функции $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Следовательно, имеем равенства

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \qquad |\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2.$$

Предположим, что $p \in [1, \infty)$, $u \in C_0^1(\Omega)$ – вещественнозначная функция. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ гиперболического типа рассмотрим неравенство

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{R^{n-p}(x,\Omega)} \geq c_{p[n]}(\Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{R^n(x,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \tag{3.66}$$

где постоянная $c_{p[n]}(\Omega) \in [0, \infty)$ однозначно определена как максимальная величина, возможная на этом месте. Точнее,

$$c_{p[n]}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^1(\Omega),\, u \not\equiv 0} \int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{R^{n-p}(x,\Omega)} dx \Big/ \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{R^n(x,\Omega)} dx\, . \tag{3.67}$$

Ниже мы покажем, что неравенство (3.66) является инвариантным по отношению к произвольным конформным преобразованиям области.

Как мы уже знаем, $c_{2[2]}(\Omega) = c_2(\Omega) > 0$ для областей с равномерно совершенными границами, но существуют области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, для которых $c_{2[2]}(\Omega) = c_2(\Omega) = 0$. Оказывается, что $c_{2[n]}(\Omega)$ положительна для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ гиперболического типа при $n \geq 3$, точнее, $c_{2[n]}(\Omega) \geq n(n-2)$. Этот факт и его обобщения доказаны в следующих трех теоремах автора [14].

Теорема 3.19 *Предположим, что $p \in [2, \infty)$, $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{R^{n-p}(x,\Omega)} \geq \frac{2^p n^{p/2}(n-2)^{p/2}}{p^p} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{R^n(x,\Omega)}. \tag{3.68}$$

Следовательно, $c_{p[n]}(\Omega) \geq 2^p n^{p/2}(n-2)^{p/2}/p^p$.

При $p = n$ получаем отсюда следующее утверждение.

Теорема 3.20 *Предположим, что $n \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа. Тогда для любой вещественнозначной функ-*

ции $u \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^n dx \geq 2^n \left(1 - 2/n\right)^{n/2} \int_\Omega \frac{|u(x)|^n dx}{R^n(x,\Omega)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \quad (3.69)$$

Сначала мы докажем основной частный случай теоремы 3.19, связанный с константой $c_{2[n]}(\Omega) \geq n(n-2)$.

Теорема 3.21 *Пусть $n \geq 3$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^2 dx}{R^{n-2}(x,\Omega)} \geq n(n-2) \int_\Omega \frac{|u(x)|^2 dx}{R^n(x,\Omega)}. \quad (3.70)$$

Доказательство теоремы 3.21. Предположим, что $u \in C_0^1(\Omega)$, где u – вещественнозначная функция. Так как $u(x) = 0$ вблизи границы области, то по первой формуле Грина будем иметь равенство

$$\int_\Omega \left(u^2 \Delta R^{2-n} + (\nabla u^2, \nabla R^{2-n})\right) dx = 0, \quad (3.71)$$

где $R = R(x,\Omega)$, $u = u(x)$, $(\nabla u^2, \nabla R^{2-n})$ – скалярное произведение градиентов функций u^2 и R^{2-n}. Пользуясь дифференциальным уравнением Лиувилля (3.60) и непосредственными вычислениями, получаем

$$\Delta R^{2-n} = -\frac{2-n}{R^n}\left(2n + \frac{n-2}{2}|\nabla R|^2\right).$$

Учитывая эту формулу для лапласиана и простое тождество для скалярного произведения

$$(\nabla u^2, \nabla R^{2-n}) = (2-n)\frac{2\,u\,(\nabla u, \nabla R)}{R^{n-1}},$$

мы можем записать (3.71) в следующем виде

$$2n\int_\Omega \frac{u^2}{R^n}dx+\int_\Omega\left(\frac{(n-2)u^2|\nabla R|^2}{2R^n}-\frac{2u\,(\nabla u,\nabla R)}{R^{n-1}}\right)dx=0.$$

Преобразуем это соотношение, а именно, добавим к обеим частям интеграл

$$\frac{2}{n-2}\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{R^{n-2}}dx.$$

Нетрудно видеть, что в результате получаем новое равенство, равносильное (3.71) и имеющее вид

$$2n\int_\Omega \frac{u^2}{R^n}dx+\int_\Omega \frac{\Phi(u,R)}{R^n}dx=\frac{2}{n-2}\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{R^{n-2}}dx, \tag{3.72}$$

где

$$\Phi(u,R)=\left(\sqrt{\frac{n-2}{2}}\,u\,\nabla R-\sqrt{\frac{2}{n-2}}\,R\,\nabla u\right)^2\geq 0.$$

Следовательно, $\int_\Omega \Phi(u,R)/R^n dx \geq 0$, поэтому равенство (3.72) влечет доказываемое неравенство (3.70). Этим и завершается доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 3.19. Докажем неравенство (3.68) для $p/2>1$, так как при $p=2$ это неравенство уже доказано.

Пусть $u\in C_0^1(\Omega)$, $u\not\equiv 0$. Легко видеть, что $|u|^{p/2}\in C_0^1(\Omega)$ для $p>2$. Применяя неравенство (3.70) к функции $|u|^{p/2}$, получаем

$$n(n-2)\int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{R^n(x,\Omega)}\leq \frac{p^2}{4}\int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)|^2dx}{R^{n-2}(x,\Omega)}.$$

Оценим сверху интеграл от произведения $fg=|u|^{p-2}|\nabla u|^2R^{2-n}$, где $f=|u|^{p-2}R^{-n+2n/p}$, $g=|\nabla u|^2R^{2-2n/p}$. Пользуясь неравенством

Гёльдера

$$\int_\Omega fg dx \le \left(\int_\Omega f^{p/(p-2)} dx\right)^{1-2/p} \left(\int_\Omega g^{p/2} dx\right)^{2/p},$$

будем иметь

$$n(n-2)\int_\Omega \frac{|u|^p dx}{R^n} \le \frac{p^2}{4}\left(\int_\Omega \frac{|u|^p dx}{R^n}\right)^{1-2/p} \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^p dx}{R^{n-p}}\right)^{2/p}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^p dx}{R^{n-p}}\right)^{2/p} \ge \frac{4n(n-2)}{p^2}\left(\int_\Omega \frac{|u|^p dx}{R^n}\right)^{2/p}, \qquad (3.73)$$

так как $0 < 2/p < 1$ и $u \not\equiv 0$.

Очевидно, неравенство (3.73) влечет (3.68) в силу произвольности функции $u \in C_0^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$. Теорема доказана.

Неравенства, установленные в трех предыдущих теоремах, являются конформно инвариантными и универсальными в семействе областей гиперболического типа. Кроме того, конформная инвариантность этих неравенств в доказательствах явно не использовалась. Понятно, что на самом деле конформная инвариантность сыграла свою роль неявно посредством применения уравнения Лиувилля. В доказательстве следующей теоремы конформная инвариантность неравенства используется напрямую.

Известно (см. теорему 3.1), что $c_p(\Omega) \equiv c_{p[2]}(\Omega) = 2^p/p^p$ для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega \ne \mathbb{R}^2$. Покажем, что аналог этого результата справедлив для любого шара из $\mathbb{R}^n$ при $n \ge 3$.

Теорема 3.22 ([14]). *Пусть $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Предположим, что $n \ge 2$, $1 \le p < \infty$. Тогда для любой веществен-*

нозначной функции $u \in C_0^1(B_n)$ имеет место неравенство

$$\int_{B_n} \frac{|\nabla u(x)|^p\, dx}{(1-|x|^2)^{n-p}} \geq \frac{2^p(n-1)^p}{p^p} \int_{B_n} \frac{|u(x)|^p dx}{(1-|x|^2)^n}. \tag{3.74}$$

Константа $2^p(n-1)^p/p^p$ является точной.

Доказательство теоремы 3.22. Для полупространства

$$H_n^+ = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$$

из результатов Харди [42] вытекает следующее неравенство с точной константой:

$$\int_{H_n^+} \frac{|\nabla u(x)|^p\, dx}{x_1^{n-p}} \geq \frac{(n-1)^p}{p^p} \int_{H_n^+} \frac{|u(x)|^p dx}{x_1^n} \quad \forall u \in C_0^1(H_n^+).$$

Поскольку гиперболический радиус полупространства выражается формулой $R(x, H_n^+) = 2x_1$, то последнее неравенство эквивалентно конформно инвариантному неравенству

$$\int_{H_n^+} \frac{|\nabla u(x)|^p\, dx}{R^{n-p}(x, H_n^+)} \geq \frac{2^p(n-1)^p}{p^p} \int_{H_n^+} \frac{|u(x)|^p dx}{R^n(x, H_n^+)} \quad \forall u \in C_0^1(H_n^+).$$

А это неравенство равносильно (3.74) в силу конформной эквивалентности шара и полупространства. Теорема доказана.

Оставшаяся часть этого пункта посвящена рутинным проверкам инвариантности исследуемых неравенств при линейных или общих конформных преобразованиях области при $n \geq 2$.

Предположим, что $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация евклидова пространства, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа, $F : \Omega \to \Pi$ – однолистное конформное отображение области Ω на область $\Pi \subset \overline{\mathbb{R}}^n$.

Допускаем конформные отображения и первого, и второго родов, т. е. рассматриваем конформные отображения, как сохраняющие, так и меняющие ориентацию. Итак, термин "конформные отображения" в двух последующих теоремах употребляется в широком смысле и объединяет как конформные, так и антиконформные отображения. Для заданной функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ определим функцию $U : \Pi \to \mathbb{R}$ равенством $u(x) \equiv U(y)$, где $y = F(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ в декартовой системе координат. Следуя Альфорсу [19], при операциях с матрицами при $n \geq 3$ будем обращаться с векторами x, y, $\nabla u(x)$ и $\nabla U(y)$ как с вектор-столбцами. Через I будем обозначать единичную матрицу, т. е. матрицу тождественного преобразования.

Для n-мерной области Ω конформная инвариантность интеграла Дирихле $\int_\Omega |\nabla u(x)|^n dx$ хорошо известна (см., например, монографию Ю. Г. Решетняка [39]). Обобщением этого факта является следующее утверждение.

Теорема 3.23 ([14]). *Пусть $n \geq 2$, $p \in [1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа, $F : \Omega \to \Pi$ – однолистное конформное отображение, $F(\Omega) = \Pi$, заданы функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и ее замена $U := u \circ F^{-1}$. Тогда*

1) для любой функции $u \in C_0^1(\Omega)$ при любом однолистном конформном преобразовании $F : \Omega \to \Pi$ имеют место равенства

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{R^n(x, \Omega)} = \int_\Pi \frac{|U(y)|^p dy}{R^n(y, \Pi)},$$

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{R^{n-p}(x, \Omega)} = \int_\Pi \frac{|\nabla U(y)|^p dy}{R^{n-p}(y, \Pi)}; \tag{3.75}$$

2) для любой функции $u \in C_0^2(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega \frac{|\Delta u(x)|^p dx}{R^{n-2p}(x, \Omega)} = \int_\Pi \frac{|\Delta U(y)|^p dy}{R^{n-2p}(y, \Pi)} \tag{3.76}$$

при выполнении ***одного из двух следующих*** *условий:*

(i) $n = 2$, $F : \Omega \to \Pi$ – однолистное конформное отображе-

ние области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *на область* $\Pi \subset \overline{\mathbb{R}}^2$*;*

(ii) $n \geq 3$*,* $F : \Omega \to \Pi$ *– линейное конформное отображение вида* $F(x) = aQx + b$*, где* $a > 0$*,* $b \in \mathbb{R}^n$*,* Q *– ортогональная матрица, точнее,* Q *– постоянная (т. е. не зависящая от* x*) вещественная* $n \times n$*-матрица, обладающая свойством* $Q^T = Q^{-1}$*.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Введем комплексные переменные $x = x_1 + ix_2$ и $y = y_1 + iy_2$. Пусть $F(\Omega) = \Pi$, где $F : \Omega \to \Pi$ – однолистное конформное отображение, сохраняющее ориентацию. Пользуясь хорошо известными формулами, получаем, что

$$R(y, \Pi) = |F'(x)| R(x, \Omega), \quad dy_1 dy_2 = |F'(x)|^2 dx_1 dx_2,$$

$$\nabla u(x) = 2\frac{\partial u(x)}{\partial \overline{x}} = 2\frac{\partial U(y)}{\partial \overline{y}} \overline{F'(x)} = \overline{F'(x)}\, \nabla U(y),$$

$$\Delta u(x) = 4\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x \partial \overline{x}} = 4\frac{\partial U(y)}{\partial y \partial \overline{y}} |F'(x)|^2 = |F'(x)|^2\, \Delta U(y).$$

Равенства (3.75) и (3.76) легко проверяются. Ясно, что эти равенства верны и в случае, когда F – конформное отображение, меняющее ориентацию.

Случай $n \geq 3$. Необходимые нам формулы и свойства конформных отображений F можно найти в книге Альфорса [19]. При $n \geq 3$ по теореме Лиувилля любое конформное отображение $F : \Omega \to \Pi$ является ограничением на Ω некоторого однолистного конформного отображения $\hat{F} : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, $\hat{F}\left(\overline{\mathbb{R}}^n\right) = \overline{\mathbb{R}}^n$. Отображение $\hat{F}$ является суперпозицией конечного числа отображений двух типов: 1) линейных конформных отображений вида

$$y = F_1(x) = aQx + b$$

с постоянной ортогональной матрицей $Q = (q_{kj})$, $a > 0$;

2) инверсии $y = F_2(x) = x/|x|^2$ относительно сферы $|x| = 1$.

Легко видеть, что при $n \geq 3$ достаточно проверить равенства (3.75) для каждого из двух указанных типов отображений. Равенство (3.76) нужно обосновать лишь для отображений первого типа, так как при $n \geq 3$ мы утверждаем выполнение равенства (3.76) лишь для линейных конформных преобразований. Если $y = F_1(x)$, то $R(y, \Pi) = aR(x, \Omega)$, $\quad dy = a^n dx$, так как $|\det Q| = 1$. Поскольку

$$Q^T Q = I = (\delta_{kj}), \quad (Qx', Qx'') = (x', x'')$$

для любых векторов $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, то легко получаем

$$|\nabla u| = a|Q\nabla U| = a|\nabla U|, \;\; \Delta u = a^2 \sum_{k,m,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial y_j \partial y_m} q_{jk} q_{mk} = a^2 \Delta U.$$

Поэтому интегралы

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{R^n(x,\Omega)} dx, \quad \int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{R^{n-p}(x,\Omega)} dx, \quad \int_\Omega \frac{|\Delta u(x)|^p}{R^{n-2p}(x,\Omega)} dx$$

инвариантны при преобразованиях $y = aQx + b$ и имеют место равенства (3.75) и (3.76).

Пусть теперь $y = F_2(x) = x/|x|^2$. Тогда матрица Якоби $F_2'(x)$ определяется формулой (см. [19, гл. 2, пункт 2.3])

$$F_2'(x) = \frac{1}{|x|^2} (I - 2\,P), \quad P = P(x), \quad P(x)_{kj} = \frac{x_k x_j}{|x|^2}.$$

Так как $P^2 = P$, то $(I - 2\,P)^2 = I$, т. е. $I - 2\,P$ является симметричной ортогональной матрицей. Следовательно, имеют место равенства $I - 2\,P = (I - 2\,P)^{-1}$, $\quad |\det(I - 2\,P)| = 1$ и простые формулы

$$R(y,\Pi)=\frac{R(x,\Omega)}{|x|^2},\ \ dy=\frac{dx}{|x|^{2n}},\ \ |\nabla u|=\frac{|(I-2P)\nabla U|}{|x|^2}=\frac{|\nabla U|}{|x|^2},$$

которые влекут равенства (3.75).

Теорема 3.24 ([14]). *Предположим, что*

1) $n\geq 2$, $p\in[1,\infty)$, $s\in\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – область, $\Omega\neq\mathbb{R}^n$ и $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа в неравенствах, содержащих гиперболический радиус;

2) постоянная $c_p(s,\Omega)$ определена как максимальная в неравенстве

$$\int_\Omega\frac{|\nabla u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^{s-p}(x,\partial\Omega)}\geq c_p(s,\Omega)\int_\Omega\frac{|u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^{s}(x,\partial\Omega)}\quad\forall u\in C_0^1(\Omega),\quad(3.77)$$

постоянная $\sigma_{p[n]}(s,\Omega)$ определена как максимальная в неравенстве

$$\int_\Omega\frac{|(\nabla u(x),\nabla R(x,\Omega))|^p\,dx}{R^{s-p}(x,\Omega)}\geq\sigma_{p[n]}(s,\Omega)\int_\Omega\frac{|u(x)|^p dx}{R^{s}(x,\Omega)}\qquad(3.78)$$

для всех вещественнозначных функций $u\in C_0^1(\Omega)$. Тогда неравенства (3.77) и (3.78) являются инвариантными при линейном биективном конформном преобразовании $F:\Omega\to\Pi$, определяемом формулой

$$F(x)=aQx+b,$$

где $a>0$, $b\in\mathbb{R}^n$, Q – постоянная ортогональная матрица. В частности, имеем равенства

$$c_p(s,\Omega)=c_p(s,\Pi),\quad\sigma_{p[n]}(s,\Omega)=\sigma_{p[n]}(s,\Pi).$$

Доказательство. Как и ранее, определим функцию U равенством $u(x) \equiv U(y)$, где $y = F(x) = aQx + b, a > 0, b \in \mathbb{R}^n$,

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega, y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \Pi,$$

$Q = (q_{kj})$ – ортогональная матрица. Очевидно, $\partial y_k / \partial x_j = q_{kj}$.

В дальнейшем мы пользуемся тем, что наше отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сохраняет длины и скалярные произведения векторов (см. [19, гл. 2]).

Так как имеют место равенства

$$dy = a^n dx,\ \operatorname{dist}(y, \partial\Pi) = a \operatorname{dist}(x, \partial\Omega),$$

$$|\nabla u(x)| = a|Q\nabla U(y)| = a|\nabla U(y)|,$$

то замена переменных в интегралах из (3.77) после сокращения на общий множитель a^{s-n} приводит к неравенству

$$\int_\Pi \frac{|\nabla U(y)|^p dy}{\operatorname{dist}^{s-p}(y, \partial\Pi)} \geq c_p(s, \Omega) \int_\Pi \frac{|U(y)|^p dy}{\operatorname{dist}^s(y, \partial\Pi)} \quad \forall U \in C_0^1(\Pi).$$

Отсюда следует, что $c_p(s, \Pi) \geq c_p(s, \Omega)$, так как $c_p(s, \Pi)$ определяется как максимальная постоянная в таком же неравенстве. Поменяв ролями области Ω и Π, получаем противоположное неравенство $c_p(s, \Pi) \leq c_p(s, \Omega)$. Таким образом, доказана инвариантность неравенства (3.77) при линейном конформном преобразовании. Далее, имеем следующие формулы

$$\nabla u(x) := \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial U(y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_1}, \sum_{k=1}^n \frac{\partial U(y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_2}, ..., \sum_{k=1}^n \frac{\partial U(y)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_n} \right) = aQ\nabla U(y),$$

$$R(y, \Pi) = aR(x, \Omega), \quad \nabla R(x, \Omega) = Q\nabla R(y, \Pi).$$

Следовательно,

$$|(\nabla u(x), \nabla R(x,\Omega))| =$$

$$= a\,|(Q\nabla U(y), Q\nabla R(y,\Pi))| = a\,|(\nabla U(y), \nabla R(y,\Pi))|\,.$$

Замена переменных в интегралах из неравенства (3.78) после сокращения на общий множитель a^{s-n} приводит к неравенству

$$\int_{\Pi} \frac{|(\nabla U(y), \nabla R(y,\Pi))|^{p}\,dy}{R^{s-p}(y,\Pi)} \geq \sigma_{p[n]}(s,\Omega) \int_{\Pi} \frac{|U(y)|^{p}dy}{R^{s}(y,\Pi)}.$$

Отсюда следует неравенство $\sigma_{p[n]}(s,\Pi) \geq \sigma_{p[n]}(s,\Omega)$ с учетом определения величины $\sigma_{p[n]}(s,\Pi)$ как максимальной постоянной в соответствующем неравенстве. Поменяв местами Ω и Π, получаем противоположное неравенство. Этим и завершается доказательство равенства $\sigma_{p[n]}(s,\Omega) = \sigma_{p[n]}(s,\Pi)$.

Глава 4

Евклидово инвариантные неравенства

Речь идет об интегральных неравенствах, инвариантных по отношению к масштабированию, а также по отношению к ортогональным преобразованиям и параллельным переносам (т. е. евклидовым движениям). В последнем пункте предыдущей главы эти преобразования (как сохраняющие, так и меняющие ориентацию) мы назвали линейными конформными преобразованиями. Интегральные неравенства в областях, инвариантные по отношению к таким преобразованиям, естественно назвать для краткости евклидово инвариантными неравенствами.

Отметим простой, но весьма важный факт. Инвариантность по отношению к масштабированию, т. е. к преобразованиям вида $y = kx$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$, k – положительная постоянная) приводит к тому, что константы в соответствующих неравенствах типа Харди и Реллиха являются безразмерными величинами.

4.1 Неравенства типа Харди

Рассмотрим сначала неравенство вида (3.78), которое является инвариантным по отношению к линейным конформным преобразованиям области, т. е. евклидово инвариантным неравенством.

Теорема 4.1 ([8] и [14]). *Предположим, что* $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$, $1 + n/2 \leq s < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– область гиперболического типа. Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|(\nabla u(x), \nabla R(x,\Omega))|^p \, dx}{R^{s-p}(x,\Omega)} \geq \frac{2^p n^p}{p^p} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{R^s(x,\Omega)}. \tag{4.1}$$

Если $s = 1 + n/2$ *и* $\Omega = H_n^+$ *– полупространство, то постоянная* $2^p n^p / p^p$ *в неравенстве* (4.1) *является точной при любом* $p \in [1, \infty)$ *и любом* $n \geq 2$.

Доказательство теоремы 4.1. Предположим сначала, что

$$s \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Пусть функция $v : \Omega \to (0, \infty)$ определена равенством

$$v(x) = R^{2-s}(x,\Omega), \quad x \in \Omega.$$

Нетрудные вычисления с учетом уравнения Лиувилля (3.60) дают, что

$$-R^s \frac{\Delta v(x)}{2-s} = 2n + \left(s - 1 - \frac{n}{2}\right) |\nabla R|^2,$$

$$R^{s-1} \frac{\nabla v(x)}{2-s} = \nabla R \quad (R = R(x,\Omega)).$$

Пусть $f \in C_0^1(\Omega)$ – вещественнозначная функция. Применяя к паре функций f и $v = R^{2-s}(.,\Omega)$ формулу Грина

$$\int_\Omega (\nabla f, \nabla v) dx = -\int_\Omega f \Delta v dx$$

и деля обе части получаемого равенства на общий множитель $2-s$, будем иметь

$$\int_\Omega \frac{(\nabla f, \nabla R)}{R^{s-1}} dx = \int_\Omega \frac{f}{R^s} \left[2n + \left(s - 1 - \frac{n}{2}\right) |\nabla R|^2\right] dx, \qquad (4.2)$$

где $R = R(x, \Omega)$, $f = f(x)$.

Для заданной вещественнозначной функции $f \in C_0^1(\Omega)$ интегралы, входящие в формулу (4.2), непрерывны по параметру $s \in \mathbb{R}$, в частности, непрерывны в точке $s = 2$. Поэтому соотношение (4.2) справедливо для любого $s \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что $u \in C_0^1(\Omega)$ – вещественнозначная функция, $1 < p < \infty$, $1 + n/2 \le s < \infty$, $f(x) :\equiv |u(x)|^p$ для $x \in \Omega$. Тогда $f \in C_0^1(\Omega)$, $s - 1 - n/2 \ge 0$. Поэтому из (4.2) следует неравенство

$$\int_\Omega \frac{|u|^{p-1} |(\nabla u, \nabla R)| \, dx}{R^{s-1}} \ge \frac{2n}{p} \int_\Omega \frac{|u|^p dx}{R^s}, \qquad (4.3)$$

где $R = R(x, \Omega)$, $u = u(x)$, $1 < p < \infty$, $1 + n/2 \le s < \infty$.

Интегралы в формуле (4.3) непрерывно зависят от параметра $p \in (1, \infty)$ для фиксированной функции $u \in C_0^1(\Omega)$. Следовательно, мы можем перейти в этом неравенстве к пределу при $p \to 1$. В результате получим доказываемое неравенство (4.1) для случая $p = 1$.

Предположим снова, что $1 < p < \infty$. Положим

$$g_1 = |u|^{p-1} R^{-s+s/p}, \quad g_2 = |(\nabla u, \nabla R)| \, R^{1-s/p}$$

и оценим сверху левую часть (4.3) с применением неравенством Гёльдера

$$\int_\Omega g_1 g_2 dx \le \left(\int_\Omega g_1^{p/(p-1)} dx\right)^{1-1/p} \left(\int_\Omega g_2^p dx\right)^{1/p}.$$

Тогда (4.3) влечет неравенство

$$\left(\int_\Omega \frac{|u|^p dx}{R^s}\right)^{1-1/p} \left(\int_\Omega \frac{|(\nabla u, \nabla R)|^p dx}{R^{s-p}}\right)^{1/p} \geq \frac{2n}{p} \int_\Omega \frac{|u|^p dx}{R^s}.$$

Отсюда следует неравенство (4.1) для случая $1 < p < \infty$.

Остается доказать утверждение теоремы 4.1 о точности константы $2^p n^p/p^p$ в случае, когда $s = 1 + n/2$ и $\Omega = H_n^+$. Для обоснования этого факта сравним неравенство Харди с неравенством (4.1) для случая, когда $\Omega = H_n^+$ и функции $u \in C_0^1(H_n^+)$ выбраны специальным образом.

Предположим, что наше утверждение о точности константы в теореме 4.1 неверно. Тогда существуют такие числа $p \in [1, \infty)$, $n \geq 2$ и $\varepsilon > 0$, что

$$\int_{H_n^+} \frac{|(\nabla u(x), \nabla R(x, H_n^+))|^p \, dx}{R^{1+n/2-p}(x, H_n^+)} \geq$$

$$\geq \left(\frac{2^p n^p}{p^p} + \varepsilon\right) \int_{H_n^+} \frac{|u(x)|^p dx}{R^{1+n/2}(x, H_n^+)} \tag{4.4}$$

для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(H_n^+)$.

Обозначим $x = (x_1, x') \in H_n^+$, где $x' = (x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим такие функции $u \in C_0^1(H_n^+)$, что

$$u(x) \equiv f(x_1) g(x'), \quad \text{где } f \in C_0^1((0, \infty)), \quad g \in C_0^1(\mathbb{R}^{n-1}), \ g \not\equiv 0.$$

Применим неравенство (4.4) к функциям $u \equiv fg$ с учетом равенств

$$R(x, H_n^+) = 2x_1, \quad |(\nabla u(x), \nabla R(x, H_n^+))| = 2|f'(x_1) g(x')|.$$

Деля обе части получаемого неравенства на число $2^{2p-1-n/2}$ и на интеграл

$$A[g] = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |g(x')|^p dx' > 0,$$

будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{|f'(x_1)|^p}{x_1^{1+n/2-p}} dx_1 \geq \left(\frac{n^p}{2^p p^p} + \frac{\varepsilon}{2^p}\right) \int_0^\infty \frac{|f(x_1)|^p}{x_1^{1+n/2}} dx_1 \quad \forall f \in C_0^1((0,\infty)).$$

Это неравенство противоречит точности константы Харди при $s = 1 + n/2$.

Для шара $|x| < 1$ с гиперболическим радиусом $1-|x|^2$ имеем

Следствие 4.1.1 *Предположим, что*

$$n \geq 2, 1 \leq p < \infty, 1 + n/2 \leq s < \infty, B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(B_n)$ имеет место неравенство

$$\int_{B_n} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial |x|}\right|^p \frac{|x|^p \, dx}{(1-|x|^2)^{s-p}} \geq \frac{n^p}{p^p} \int_{B_n} \frac{|u(x)|^p dx}{(1-|x|^2)^s}. \tag{4.5}$$

Так как $|\nabla u(x)| \geq |\partial u(x)/\partial r|$, $r = |x|$, то неравенство (4.5) влечет соответствующее неравенство для градиента $|\nabla u(x)|$.

Полагая $p = s$ в теореме 4.1, получаем

Следствие 4.1.2 *Предположим, что $n \geq 2$, $1 + n/2 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int_\Omega |(\nabla u(x), \nabla R(x,\Omega))|^p \, dx \geq \frac{2^p n^p}{p^p} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{R^p(x,\Omega)}.$$

Если $p = 1$ и $s = n$ в теореме 4.1, то получаем

Следствие 4.1.3 *Пусть $n \geq 2$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|(\nabla u(x), \nabla R(x,\Omega))|\, dx}{R^{n-1}(x,\Omega)} \geq 2n \int_\Omega \frac{|u(x)| dx}{R^n(x,\Omega)}.$$

Далее мы рассматриваем многомерные универсальные неравенства. Они представлены в трех следующих теоремах, обобщающих теорему 2.18 и доказанных автором в статьях [6], [52].

Теорема 4.2 ([52]). *Предположим, что $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $1 \leq p < \infty$, $n < s < \infty$, и пусть Ω – произвольное открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{\operatorname{dist}^{s-p}(x,\partial\Omega)} dx \geq \left(\frac{s-n}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\operatorname{dist}^s(x,\partial\Omega)} dx. \tag{4.6}$$

Существуют области, для которых постоянная $((s-n)/p)^p$ является точной, т. е. не может быть увеличена.

Теорема 4.3 ([6]). *Предположим, что $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $1 \leq p < \infty$, $n < s < \infty$, $\delta_0(\Omega) = \sup\{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) : x \in \Omega\}$, и пусть Ω – произвольное открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ имеют место неравенства*

$$\int_\Omega \left(\ln \frac{\delta_0(\Omega)}{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)}\right)^p \frac{|\nabla u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^{n-p}(x,\partial\Omega)} \geq \frac{1}{p^p} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^n(x,\partial\Omega)}, \tag{4.7}$$

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-1} |\nabla u(x)|}{\operatorname{dist}^{n-1}(x,\partial\Omega)} dx \geq \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{\operatorname{dist}^n(x,\partial\Omega) \ln^2 X}, \tag{4.8}$$

где $X = e\, \delta_0(\Omega)/\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$.

Теорема 4.4 ([6]). *Предположим, что* $1 \le p < \infty$ $n < s < \infty$, $\delta_0(\Omega) = \sup\{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) : x \in \Omega\}$, *и пусть* Ω *– произвольное открытое собственное подмножество* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u|^p \, (1 - Y)}{\operatorname{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \ge \frac{(s-n)^p}{p^p} \int_\Omega \frac{|u|^p \, (1 + p(s-1)^{-1} Y)}{\operatorname{dist}^s(x, \partial\Omega)} dx, \quad (4.9)$$

где $Y = \operatorname{dist}^s(x, \partial\Omega)/\delta_0^s(\Omega)$.

Заметим, что теорема 4.2 является следствием теоремы 4.4. Поэтому нам нужно доказать лишь теоремы 4.3 и 4.4. Доказательства этих двух теорем проводятся по единой схеме. Для краткости формул при доказательстве теоремы 4.3 и теоремы 4.4 мы будем пользоваться следующими обозначениями

$$\delta = \delta(x) = \delta(x, \Omega) = \operatorname{dist}(x, \Omega), \quad \delta_0 = \delta_0(\Omega).$$

Кроме того, нам потребуется следующий переход от L^1-неравенства к L^p версии этого неравенства.

Предложение 4.1 *Пусть* Ω *– открытое собственное подмножество* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$. *Предположим, что заданы две непрерывных функции* $w_1 = w_1(x) > 0$ *и* $w_2 = w_2(x) \ge 0$ *на* Ω *и задан некоторый функционал* $J : C_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Если для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(\Omega)$

$$J(u) + \int_\Omega |u| w_1 \, dx \le c \int_\Omega |\nabla u| w_2 \, dx \quad (c = const. > 0),$$

то для любого $p \in (1, \infty)$ *и для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$

$$pJ(|u|^p) + \int_\Omega |u|^p w_1 \, dx \le (cp)^p \int_\Omega |\nabla u|^p w_1^{1-p} w_2^p \, dx.$$

Доказательство предложения 4.1. Пусть функция $u \in C_0^1(\Omega)$ и $p \in (1,\infty)$, тогда функция $v = |u|^p$ принадлежит $C_0^1(\Omega)$, так как $\nabla|u|^p = p|u|^{p-1}(\nabla u)\operatorname{sign}(u)$, и функция $|u|^{p-1}\operatorname{sign}(u)$ является непрерывной в силу того, что параметр $p > 1$.

Далее, имеем $|\nabla|u|^p| \le p|u|^{p-1}|\nabla u|$. Применяя заданное неравенство к функции $v = |u|^p \in C_0^1(\Omega)$ и привлекая неравенство Юнга (см. [42], стр. 37) $a^{p-1}b \le (1-1/p)a^p + (1/p)b^p$ к величинам

$$a = |u|\, w_1^{1/p}, \quad b = c\, p\, |\nabla u|\, w_2\, w_1^{1/p-1},$$

получаем

$$J(|u|^p) + \int_\Omega |u|^p w_1\, dx \le cp \int_\Omega |u|^{p-1}|\nabla u| w_2 dx \le$$

$$\le \int_\Omega \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right) |u|^p w_1 + \frac{(cp)^p}{p} |\nabla u|^p w_1^{1-p} w_2^p \right\} dx,$$

что завершает доказательство предложения.

Доказательство теоремы 4.3. В силу предложения 4.1 нам достаточно обосновать (4.7) лишь для $p = 1$. Далее, неравенство (4.8) с $p = 1$ непосредственно влечет неравенство (4.8) для $p > 1$. Поэтому нам достаточно доказать неравенства (4.7) и (4.8) лишь для $p = 1$. Для полноты рассмотрим и случай $n = p = 1$, он является простым, и мы будем рассматривать его отдельно от основного случая, когда $n \ge 2$ и $p = 1$.

Случай $n = p = 1$. Поскольку открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ является объединением интервалов, достаточно доказать неравенства для интервала $(0, a)$ и для функций $u \in C^1([0, a])$ таких, что $0 < a \le \delta_0$ и $u(0) = 0$. Легко получаем

$$\int_0^a \frac{|u(x)|}{x} dx \le \int_0^a \frac{dx}{x} \int_0^x |u'(t)| dt =$$

$$= \int_0^a |u'(t)| \ln \frac{a}{t} dt,$$

что влечет доказываемое неравенство, так как $\ln(a/t) \le \ln(\delta_0/t)$. Кроме того, имеем

$$\int_0^a \frac{|u(x)|}{x(\ln(\delta_0 e/x))^2} dx \le \int_0^a \frac{dx}{x(\ln(ae/x))^2} \int_0^x |u'(t)| dt =$$

$$= \int_0^a |u'(t)| \left(1 - \frac{1}{\ln(ae/t)}\right) dt \le \int_0^a |u'(t)| dt,$$

что завершает доказательство случая $n = p = 1$.

Случай $n \ge 2, p = 1$. Нам потребуется следующая классическая аппроксимация Жордана открытого множества Ω. Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим простейшее покрытие $\mathbb{R}^n$ кубами

$$K_{\varepsilon z} = [0, \varepsilon]^n + \varepsilon z, \quad z \in \mathbb{Z}^n,$$

и определим ограниченное открытое множество $\Omega_\varepsilon = \mathrm{int} \cup K_{\varepsilon z}$, где объединение взято по всем кубам $K_{\varepsilon z}$ таким, что

$$K_{\varepsilon z} \subset \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/\varepsilon\}.$$

Здесь $\mathrm{int} \cup K_{\varepsilon z}$ означает множество внутренних точек $\cup K_{\varepsilon z}$. Пусть теперь $u \in C_0^1(\Omega)$, и пусть E_u – компактный носитель этой функции. Выберем $\varepsilon \in (0,1)$ так, что $\varepsilon < d_u/\sqrt{n}$, где

$$d_u = \mathrm{dist}(E_u, \partial\Omega) = \inf\{|x - y| : x \in E_u, y \in \partial\Omega\} \in (0, \infty).$$

Легко видеть, что для любого $x \in E_u = \mathrm{supp}(u)$

$$1 \le \frac{\delta(x, \Omega)}{\delta(x, \Omega_\varepsilon)} \le 1 + \frac{\sqrt{n}}{d_u} \varepsilon.$$

Следовательно, чтобы доказать неравенства (4.7) и (4.8) для заданной функции $u \in C_0^1(\Omega)$, достаточно обосновать неравенства (4.7) и (4.8) в $\Omega = \Omega_\varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$. Далее, заменой переменных $y = x/\varepsilon$ $(x \in \Omega)$ получаем, что (4.7) и (4.8) в $\Omega = \Omega_\varepsilon$ и $\Omega = \Omega_1$ являются эквивалентными. Таким образом, достаточно доказать (4.7) и (4.8) лишь для множеств следующего вида

$$\Omega_1 = \operatorname{int}\bigcup_{j=1}^{m}([0,1]^n + z_j), \quad z_j \in \mathbb{Z}^n.$$

Для обоснования неравенств в области Ω_1 потребуется специальное разбиение Ω_1. Пусть $k \in \{1, 2, ..., n\}$ и S является $(n-k)$-мерной гранью куба $K = K_{1z_j}$, причем $S \subset \partial\Omega_1$. Определим

$$K(S) = \{x \in \overline{\Omega}_1 : \exists \text{ точка}\, y \in S \text{ такая, что}\, \delta(x, \partial\Omega_1) = |x-y|\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь тот случай, когда $K(S) \neq S$. Ясно, что множество $K(S) \neq S$ является компактом, звездным относительно S. С точностью до вращения множество $K(S) \neq S$ может быть представлено как подмножество ортогонального произведения $S \times \mathbb{R}_+^k$:

$$K(S) = \{y + \delta\omega : y \in S, \omega \in S_+^k, 0 \leq \delta \leq \varphi_{n-k}(y, \omega; S, \Omega_1)\},$$

где по определению $\mathbb{R}_+^k = \{(t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k : t_1 \geq 0, ..., t_k \geq 0\}$, множество $S_+^k = \{t \in \mathbb{R}_+^k : |t| = 1\}$. Кроме того, φ_{n-k} удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \varphi_{n-k} \leq \delta_0(\Omega_1).$$

Пересечение $K(S) \cap K(S')$ для различных кубических граней является либо пустым множеством, либо ограниченным подмножеством некоторой $(n-1)$-мерной плоскости или поверхности второго порядка. Поэтому $\operatorname{mes}_n K(S) \cap K(S') = 0$. Поскольку $\partial\Omega_1$

содержит конечное число граней наших кубов, для любой функции $g \in C(\overline{\Omega}_1)$ мы можем написать

$$\int_{\Omega_1} g(x)dx = \sum_{S \subset \partial\Omega_1} \int_{K(S)} g(x)dx.$$

В силу этой формулы является очевидным, что достаточно доказать (4.7) и (4.8) в $\Omega = K(S)$ для $u \in C^1(K(S))$ такой, что $u(x) = 0$ для любого $x \in S$.

Проведем нужные оценки интегралов по множеству $K(S)$. При вычислении интегралов по множеству $K(S)$ с переменной $r = \delta(x, \Omega_1)$, как с одной из переменных интегрирования, приходится пользоваться либо сферическими, либо цилиндрическими, либо декартовыми координатами. Переходя к соответствующим повторным интегралам, мы получаем n различных формул, содержащих функции $\varphi_{n-k}(y, \omega) = \varphi_{n-k}(y, \omega; S, \Omega_1) \in [0, \delta_0(\Omega_1)]$:

(i) если $\dim(S) = n - 1$, то

$$\int_{K(S)} g(x)dx = \int_S dy \int_0^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} g(y + r\omega_0)dr; \tag{4.10}$$

(ii) если $\dim(S) = n - k$ и $2 \le k \le n - 1$, то

$$\int_{K(S)} g(x)dx = \int_S dy \int_{S_+^k} d\omega \int_0^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} g(y + r\omega)r^{k-1}dr; \tag{4.11}$$

(iii) если dim(S) = 0, т. е. $S = \{x_0\}$ – вершина, то

$$\int_{K(S)} g(x)dx = \int_{S_+^n} d\omega \int_0^{\varphi_0(x_0,\omega)} g(x_0 + r\omega)r^{n-1}dr. \tag{4.12}$$

Теперь мы применим эти формулы к функции

$$g(x) = |u(x)|/\delta(x, \Omega_1)^n, \quad u \in C_0^1(\Omega_1).$$

Пользуясь тем, что $0 \le \varphi_k \le \delta_0 = \delta_0(\Omega_1)$ и $|\partial u/\partial r| \le |\nabla u|$, для внутреннего интеграла в (4.10), (4.11) и (4.12) получаем следующие оценки:

$$\int_0^{\varphi_{n-k}} \frac{|u(y+r\omega)|}{r^n} r^{k-1} dr \le \int_0^{\varphi_{n-k}} \frac{dr}{r^{n-k+1}} \int_0^r |\nabla u(y+t\omega)| dt =$$

$$= \int_0^{\varphi_{n-k}} \frac{|\nabla u(y+t\omega)|}{t^{n-1}} \Phi_k(t) t^{k-1} dt,$$

где

$$\Phi_k(r) = r^{n-k} \int_r^{\varphi_{n-k}} \frac{dt}{t^{n-k+1}} \le r^{n-k} \int_r^{\delta_0} \frac{dt}{t^{n-k+1}}$$

$$= \int_1^{\delta_0/r} \frac{dt}{t^{n-k+1}} \le \ln \frac{\delta_0}{r}.$$

Следовательно, имеем

$$\int_{K(S)} \frac{|u|}{\delta^n} dx \le \int_{K(S)} \frac{|\nabla u|}{\delta^{n-1}} \ln \frac{\delta_0}{\delta} dx,$$

что завершает доказательство (4.7) в случае $n \ge 2$, $p = 1$. Аналогичным образом, для $g(x) = |u(x)|/(\delta^n(\ln(\delta_0 e/\delta))^2)$ имеем

$$\int_0^{\varphi_{n-k}} \frac{|u(y+r\omega)|}{r^n(\ln(\delta_0 e/r))^2} r^{k-1} dr \le \int_0^{\varphi_{n-k}} \frac{|\nabla u(y+t\omega)|}{t^{n-1}} \Psi_k(t) t^{k-1} dt,$$

где

$$\Psi_k(r) \le r^{n-k} \int_r^{\delta_0} \frac{dt}{t^{n-k+1}(\ln(\delta_0 e/t))^2} = \int_1^{\delta_0/r} \frac{dt}{t^{n-k+1}(\ln(\delta_0 e/(rt)))^2} \le$$

$$\le \int_1^{\delta_0/r} \frac{dt}{t(\ln(\delta_0 e/(rt)))^2} = 1 - \frac{1}{\ln(\delta_0 e/r)} \le 1.$$

Следовательно, можно написать

$$\int_{K(S)} \frac{|u|}{\delta^n(\ln(\delta_0 e/\delta))^2}\,dx \le \int_{K(S)} \frac{|\nabla u|}{\delta^{n-1}} dx,$$

этим и завершается доказательство теоремы 4.3.

Доказательство теоремы 4.4. Применение предложения 4.1 с величинами

$$J(f) = \frac{\delta_0^{-s}}{s-1}\int_\Omega |u|\,dx,$$

$$w_1 = \frac{1}{\delta^s},\ w_2 = \frac{1}{\delta^{s-1}}\left(1 - \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^s\right),\ c = \frac{1}{s-n}$$

показывает, что (4.9) достаточно доказать для $p = 1$. Кроме того, в силу проведенных в доказательстве теоремы 4.3 конструкций, нам достаточно доказать (4.9) для функции $u \in C^1(K(S))$ такой, что $u(x) = 0$ для любого $x \in S$. Для $p = 1$ и $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ требуемое неравенство получается как следствие оценок

$$\int_0^{\varphi_{n-k}} \frac{|u(y + r\omega)|}{r^s}\left(1 + \frac{r^s}{(s-1)\delta_0^s}\right) r^{k-1} dr \le$$

$$\le \int_0^{\varphi_{n-k}} \left(\frac{1}{r^{s-k+1}} + \frac{r^{k-1}}{(s-1)\delta_0^s}\right) dr \int_0^r |\nabla u(y + t\omega)| dt =$$

$$= \int_0^{\varphi_{n-k}} \frac{|\nabla u(y + t\omega)|}{t^{s-1}} T_k(t) t^{k-1} dt,$$

где

$$T_k(r) \le r^{s-k} \int_r^{\delta_0} \left(\frac{1}{t^{s-k+1}} + \frac{t^{k-1}}{(s-1)\delta_0^s}\right) dt =$$

$$= \int_1^{\delta_0/r} \left(\frac{1}{t^s} + \frac{r^s}{(s-1)\delta_0^s}\right) t^{k-1} dt \le \int_1^{\delta_0/r} \left(\frac{1}{t^s} + \frac{r^s}{(s-1)\delta_0^s}\right) t^{n-1} dt =$$

$$= \frac{1 - (r/\delta_0)^{s-n}}{s-n} + \frac{(r/\delta_0)^{s-n} - (r/\delta_0)^s}{n(s-1)} \le \frac{1 - (r/\delta_0)^s}{s-n}.$$

Выше мы использовали элементарное неравенство

$$1 - x^{s-n} + \frac{s-n}{n(s-1)}(x^{s-n} - x^s) \le 1 - x^s$$

для $0 \le x \le 1$ и $s > n \ge 2$. Следовательно, согласно (4.10), (4.11) и (4.12) имеем

$$\int_{K(S)} \frac{|u|}{\delta^s} \left(1 + \frac{\delta^s}{(s-1)\delta_0^s}\right) dx \le \frac{1}{s-n} \int_{K(S)} \frac{|\nabla u|}{\delta^{s-1}} (1 - \delta^s/\delta_0^s) dx.$$

Этим и завершается доказательство теоремы 4.4. Пользуясь доказательством теоремы 4.4, легко получить следующий вариант неравенства (4.9)

$$\int_\Omega \frac{|u|^p}{\delta^s} dx \le \left(\frac{p}{s-n}\right)^p \int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{\delta^{s-p}} \left(1 - \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{s-n}\right)^p dx, \qquad (4.13)$$

где $1 \le p < \infty$, $n < s < \infty$, Ω – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ с конечным $\delta_0(\Omega)$, $n \ge 1$ и $u \in C_0^1(\Omega)$. Неравенство (4.13) обобщает теорему 4.2 и порождает ее, так как $\left(1 - (\delta/\delta_0)^{s-n}\right)^p \le 1$.

4.2 Об одной задаче Брезиса и Маркуса

Пусть снова $\delta = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, $\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Неравенство с дополнительным слагаемым

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \ \ge \ \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{|u|^2}{\delta^2} \, dx + \lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \qquad (4.14)$$

где Ω – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, $\lambda = (1/4)/\left(\mathrm{diam}\,(\Omega)\right)^2$, предложенное Х. Брезисом и М. Маркусом [73], исследовалось во многих работах (см., например, [58], [63], [65], [78], [79], [89]).

В частности, в статье автора и К.-Й. Вирца [63] доказано,

что
$$\frac{j_{n/2-1}^2 - 1/4}{\delta_0^2(\Omega)} \ \geq \ \lambda(\Omega) \ \geq \ \frac{\lambda_0^2}{\delta_0^2(\Omega)}, \tag{4.15}$$
где j_ν – первый нуль функции Бесселя J_ν порядка ν, $\lambda_0 \approx 0.940$ – постоянная Лямба, определенная как первый нуль в луче $(0, +\infty)$ функции $J_0(x) - 2xJ_1(x) \equiv J_0(x) + 2xJ_0'(x)$.

Кроме того, в [63] доказано, что нижняя оценка в неравенствах (4.15) является точной для всех размерностей $n \geq 1$. Экстремальные области имеют вид $(0,1) \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим вопрос о наилучшей константе в неравенствах Брезиса-Маркуса для шаров $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$. В силу инвариантности неравенств при линейных конформных преобразованиях области достаточно рассматривать лишь случай $x_0 = 0, \rho = 1$, т. е. случай единичного шара $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

Речь идет о неравенстве
$$\int_{B_n} |\nabla u|^2 \, dx \ \geq \ \frac{1}{4} \int_{B_n} \frac{|u|^2}{(1-|x|)^2} \, dx + c(n) \int_{B_n} |u|^2 \, dx \ \forall u \in C_0^1(B_n),$$
где константа $c(n)$ определена равенством
$$c(n) = \inf_{u \in C_0^1(B_n),\, u \not\equiv 0} \frac{\int_{B_n} (|\nabla u|^2 - (1/4)|u|^2(1-|x|)^{-2}) \, dx}{\int_{B_n} |u|^2 \, dx}. \tag{4.16}$$

Основное утверждение относительно констант $c(n)$ представлено в следующей теореме.

Теорема 4.5 (см. [70], [63] и [65]). *Имеют место следующие утверждения:* *(i)* $c(1) = \lambda_0^2$, *где* $\lambda_0 \approx 0.940$ – *постоянная Лямба, определенная как первый положительный корень уравнения* $J_0(t) + 2tJ_0'(t) = 0$; *(ii)* $c(2) \geq 2$;

(iii) $c(3) = j_0^2$, *где* $j_0 \approx 2.4048$ – *первый положительный нуль функции Бесселя* $J_0(t)$ *порядка* 0;

(iv) для любого $n \geq 4$ $(n \in \mathbb{N})$

$$c(n) \geq j_0^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

Доказательство теоремы 4.5. Поскольку шар B_1 – интервал $(-1, 1)$, то утверждение (i) следует из теоремы 1, опубликованной в статье автора и К.-Й. Вирца [63], с. 634.

Для доказательства пунктов (ii), (iii) и (iv) нам нужна следующая лемма.

Лемма 4.1 *Предположим, что $y \in C^2(0,1)$, $y(t) > 0$ в $(0,1)$ и*

$$\mu_n(t) := (1-t)^{n-1}\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{n-1}{2}(1-t)^{n-2},$$

$$K_n(t) := \frac{(n-1)(n-3)}{4(1-t)^2} - \frac{y''(t)}{y(t)}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой вещественнозначной функции $f \in C^1(0,1)$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 f'^2(t)(1-t)^{n-1}\,dt \geq \int_0^1 f^2(t)K_n(t)(1-t)^{n-1}\,dt \tag{4.17}$$

при условии

$$\lim_{t\to 1^-} f^2(t)\mu_n(t) - \lim_{t\to 0^+} f^2(t)\mu_n(t) \geq 0. \tag{4.18}$$

Равенство в (4.17) для некоторой функции f с конечным интегралом $\int_0^1 f'^2(t)(1-t)^{n-1}\,dt$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$f(t) = Cf_0(t) \quad \text{для} \quad C = const, \quad f_0(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{(1-t)^{n-1}}},$$

при условии

$$\int_0^1 d(f_0^2(t)\mu_n(t)) = 0, \quad \int_0^1 f_0'^2(t)(1-t)^{n-1}\,dt < \infty.$$

Доказательство леммы 4.1. Пусть функция $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ такова, что $f\in C^1(0,1)$ и выполнено условие (4.18). Введем функцию

$$f_0(t) = y(t)/\sqrt{\sigma(t)}, \quad \text{где} \quad \sigma(t) = (1-t)^{n-1},$$

и рассмотрим интеграл

$$A(f) := \int_0^1 \sigma(t)\left(f'(t) - \frac{f_0'(t)}{f_0(t)}f(t)\right)^2 dt \ge 0.$$

Непосредственные вычисления с использованием интегрирования по частям дают, что

$$A(f) = \int_0^1 \sigma(t)f'^2(t)dt - \int_0^1 \sigma(t)\frac{f_0'(t)}{f_0(t)}\,df^2(t) + \int_0^1 \sigma(t)\frac{f_0'^2(t)}{f_0^2(t)}f^2(t)dt =$$

$$= -B(f) + \int_0^1 \sigma(t)f'^2(t)dt + \int_0^1 f^2(t)\left(\left(\sigma(t)\frac{f_0'(t)}{f_0(t)}\right)' + \sigma(t)\frac{f_0'^2(t)}{f_0^2(t)}\right)dt,$$

где

$$B(f) = \int_0^1 d\left(f^2(t)\sigma(t)\frac{f_0'(t)}{f_0(t)}\right)dt = \int_0^1 d\left(f^2(t)\mu_n(t)\right)dt \ge 0$$

благодаря неравенству (4.18). Пользуясь тождествами

$$\left(\sigma(t)\frac{f_0'(t)}{f_0(t)}\right)' = \frac{(\sigma(t)f_0'(t))'}{f_0(t)} - \sigma(t)\frac{f_0'^2(t)}{f_0^2(t)}$$

и

$$-\frac{(\sigma(t)f_0'(t))'}{\sigma(t)f_0(t)} = \frac{\sigma''(t)}{2\sigma(t)} - \frac{\sigma'^2(t)}{4\sigma^2(t)} - \frac{y''(t)}{y(t)} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)}{4(1-t)^2} - \frac{y''(t)}{y(t)} \equiv K_n(t),$$

немедленно получаем

$$\int_0^1 f'^2(t)\sigma(t)\,dt = A(f) + B(f) + \int_0^1 f^2(t)K_n(t)\sigma(t)\,dt. \qquad (4.19)$$

Это дает доказываемое неравенство (4.17), так как $A(f) \geq 0$, $B(f) \geq 0$ и $\sigma(t) = (1-t)^{n-1}$.

Предположим теперь, что имеется равенство в (4.17) для некоторой функции $f \in C^1(0,1)$, такой, что конечен интеграл $I(f) := \int_0^1 f'^2(t)(1-t)^{n-1}\,dt$. В силу (4.19) ясно, что равенство в (4.17) возможно тогда и только тогда, когда $A(f) = B(f) = 0$. Соотношение $A(f) = 0$ равносильно уравнению

$$f'(t) - \frac{f_0'(t)}{f_0(t)} f(t) = 0, \quad t \in (0,1).$$

Отсюда следует, что $f(t) = Cf_0(t)$, $C = const$. Этим завершается доказательство леммы 4.1.

Доказательство (ii). Достаточно доказать, что для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^1(B_2)$ справедливо неравенство

$$\int_{B_2} |\nabla u|^2\,dx \;\geq\; \frac{1}{4}\int_{B_2} \frac{|u|^2}{(1-|x|)^2}\,dx + 2\int_{B_2} |u|^2\,dx,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(|\nabla u(r,\theta)|^2 - \frac{|u(r,\theta)|^2}{4(1-r)^2} - 2|u(r,\theta)|^2 \right) rdr \geq 0 \quad (4.20)$$

в полярной системе координат. Поскольку

$$|\nabla u(r,\theta)| \geq \left| \frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} \right|,$$

то неравенство (4.20) следует из одномерного неравенства

$$\int_0^1 f'^2(t)(1-t)\,dt \geq \int_0^1 \left(\frac{1}{4t^2}+2\right) f^2(t)(1-t)\,dt \qquad (4.21)$$

для функций $f \in C^1[0,1]$, удовлетворяющих условию $f(0)=0$ и определенных уравнением

$$f(t) = u(1-t,\theta)$$

для любого фиксированного $\theta \in [0,2\pi]$. Чтобы получить (4.21) применяем лемму 4.1 в случае $n=2$ и $y(t)=y_2(t)=\sqrt{t(1-t)}$. Имеем $B(f)=0$, так как $\mu_2(t)=(1-t)/(2t)$ и $f^2(t)=O(t^2)$ при $t\to 0^+$. Непосредственные вычисления дают

$$K_2(t) = -\frac{1}{4(1-t)^2} - \frac{y''(t)}{y(t)} =$$

$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{2t(1-t)} \geq \frac{1}{4t^2}+2, \quad t\in(0,1).$$

Следовательно, неравенство

$$\int_0^1 f'^2(t)(1-t)\,dt \geq \int_0^1 f^2(t)K_2(t)(1-t)\,dt$$

леммы 4.1 влечет (4.21). Этим завершается доказательство *(ii)*. *Доказательство (iii)*. Сначала покажем, что $c(3)\geq j_0^2$, т. е. для любой вещественнозначной функции $f\in C_0^1(B_3)$

$$\int_{B_3} |\nabla u(x)|^2\,dx \;\geq\; \frac{1}{4}\int_{B_3}\frac{|u(x)|^2}{(1-|x|)^2}\,dx + j_0^2\int_{B_3}|u(x)|^2\,dx. \quad (4.22)$$

Будем пользоваться сферическими координатами с $x=r\omega$, где $|x|=r$, и дифференциальным элементом объема $dx=r^2drd\omega$. Для любого фиксированного ω функция $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, определенная равенством

$$f(t) = u((1-t)\omega),$$

удовлетворяет условиям: $f \in C^1[0,1]$, $f(0) = 0$. Применим лемму 4.1 к этой функции f, выбирая $n = 3$, $y = y_3(t) = \sqrt{t}J_0(j_0 t)$, где J_0 – функция Бесселя порядка 0 и j_0–первый положительный нуль функции $J_0(t)$. Имеем $B(f) = 0$ в силу уравнения

$$\mu_3(t) = (1-t)^2 \frac{f_0'(t)}{f_0(t)} = \frac{(1-t)^2}{2t} + j_0(1-t)^2 \frac{J_0'(j_0 t)}{J_0(j_0 t)} + 1 - t.$$

Более того, функция y_3 удовлетворяет уравнению Бесселя (см., например, [92], с. 440, (1a) для $c = 1/4$, $b = j_0^2$, $a = \nu = 0$, $m = 2$)

$$y'' + \left(j_0^2 + \frac{1}{4t^2}\right) y = 0.$$

Поэтому функция K_3 в лемме 4.1 представлена явной формулой $K_3(t) = j_0^2 + 1/(4t^2)$, и (4.17) примет вид

$$\int_0^1 f'^2(t)(1-t)^2\, dt \geq \int_0^1 \left(\frac{1}{4t^2} + j_0^2\right) f^2(t)(1-t)^2\, dt,$$

или, что то же самое,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u(r\omega)}{\partial r}\right)^2 r^2\, dr \geq \int_0^1 \left(\frac{1}{4(1-r)^2} + j_0^2\right) |u(r\omega)|^2 r^2\, dr.$$

Интегрируя последнее неравенство по единичной сфере с учетом соотношений

$$dx = r^2 dr d\omega, \quad |\nabla u| \geq \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|,$$

немедленно получаем (4.22).

Теперь мы докажем, что константа j_0^2 является наилучшей из возможных, т. е. $c(3) \leq j_0^2$. С этой целью покажем, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует функция $u_\varepsilon : \overline{B}_3 \to \mathbb{R}$, такая, что

$u_\varepsilon \in C^1(B_3) \cap C(\overline{B}_3)$, $u_\varepsilon(x) = 0$ для $|x| = 1$ и

$$\int_{B_3} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \; < \; \frac{1}{4} \int_{B_3} \frac{|u_\varepsilon|^2}{(1-|x|)^2} \, dx + (j_0^2 + \varepsilon_0) \int_{B_3} |u_\varepsilon|^2 \, dx. \quad (4.23)$$

В качестве u_ε возьмем радиальные функции, а именно, функции $u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(|x|)$, определенные равенством

$$u_\varepsilon(1-t) = f_\varepsilon(t) := t^{1/2+\varepsilon} \frac{J_0(j_0 t)}{1-t}.$$

Эти функции удовлетворяют (4.23) для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Действительно, для этих радиальных функций неравенство (4.23) эквивалентно неравенству

$$\int_0^1 f_\varepsilon'^2(t)(1-t)^2 \, dt \; < \; \int_0^1 \left(\frac{1}{4t^2} + j_0^2 + \varepsilon_0 \right) f_\varepsilon^2(t)(1-t)^2 \, dt. \quad (4.24)$$

Пользуясь (4.19) в случае

$$n = 3, \qquad \sigma(t) = (1-t)^2, \qquad f = f_\varepsilon$$

и

$$f_0(t) = \sqrt{t} \frac{J_0(j_0 t)}{1-t}, \qquad K_3(t) = \frac{1}{4t^2} + j_0^2,$$

получаем

$$A(f_\varepsilon) + B(f_\varepsilon) = \int_0^1 \left(f_\varepsilon'^2(t) - K_3(t) f_\varepsilon^2(t) \right) (1-t)^2 \, dt.$$

Следовательно, можем переписать (4.24) в виде

$$A(f_\varepsilon) + B(f_\varepsilon) < \varepsilon_0 \int_0^1 f_\varepsilon^2(t)(1-t)^2 \, dt. \quad (4.25)$$

Нетрудно получить, что $B(f_\varepsilon)=0$. В самом деле, имеем

$$\mu_3(t)=\frac{(1-t)^2}{2t}+j_0(1-t)^2\frac{J_0'(j_0t)}{J_0(j_0t)}+1-t,$$

$\mu_3(t)=O(1-t)$ при $t\to 1^-$, $f_\varepsilon^2(t)\mu_3(t)=O(t^{2\varepsilon})$ при $t\to 0^+$. Кроме того, прямыми вычислениями получаем, что $A(f_\varepsilon)=O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0^+$ в силу равенства

$$A(f_\varepsilon)=\varepsilon^2\int_0^1 t^{-1+2\varepsilon}J_0^2(j_0t)\,dt=\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 J_0^2(j_0\tau^{1/(2\varepsilon)})\,d\tau.$$

Это вместе с соотношениями

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_0^1 f_\varepsilon^2(t)(1-t)^2dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_0^1 t^{1+2\varepsilon}J_0^2(j_0t)dt=\int\limits_0^1 tJ_0^2(j_0t)dt>0$$

показывает, что (4.25) выполнено для достаточно малых $\varepsilon>0$. Имеем (4.23) для малых $\varepsilon>0$, что завершает доказательство. *Доказательство (iv).* Пусть $u\in C_0^1(B_n)$, $n\geq 4$, и пусть $x=r\omega$, где $r=|x|$. Применим лемму 4.1 к $f(t)=u((1-t)\omega)$ для любого фиксированного ω, выбирая $y(t)=\sqrt{t}J_0(j_0t)$. Так как функция $f\in C^1[0,1]$, $f(0)=0$, и

$$\mu_n(t)==\frac{(1-t)^{n-1}}{2t}+j_0(1-t)^{n-1}\frac{J_0'(j_0t)}{J_0(j_0t)}+\frac{n-1}{2}(1-t)^{n-2},$$

то функция $f^2(t)\mu_n(t)$ является непрерывной на отрезке $[0,1]$ и обращается в нуль в точках $t=0$ и $t=1$ в силу условий $f(0)=0$ и $n\geq 4$. Поэтому f удовлетворяет неравенству (4.17) с

$$K_n(t)=\frac{(n-1)(n-3)}{4(1-t)^2}+\frac{1}{4t^2}+j_0^2\geq$$

$$\geq \frac{1}{4t^2} + j_0^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \qquad \text{при} \qquad t \in (0,1).$$

Замена $r = 1 - t$ в соответствующем случае из (4.17) дает

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u(r\omega)}{\partial r}\right)^2 r^{n-1}\, dr \geq \int_0^1 \left(\frac{1}{4(1-r)^2} + p_n\right) |u(r\omega)|^2 r^{n-1}\, dr,$$

где $p_n = j_0^2 + (n-1)(n-3)/4$. Последнее неравенство влечет, что

$$\int_{B_n} |\nabla u(x)|^2\, dx \;\geq\; \frac{1}{4}\int_{B_n} \frac{|u(x)|^2}{(1-|x|)^2}\, dx + p_n \int_{B_n} |u(x)|^2\, dx.$$

Пользуясь этой оценкой вместе с (4.15), получаем

$$j_{n/2-1}^2 - 1/4 \geq c(n) \geq p_n = j_0^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4}. \tag{4.26}$$

Так как

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{j_\nu}{\nu} = 1 \tag{4.27}$$

(см., например, [45], формулу 9.5.14), то становится очевидным, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{n/2-1}^2 - 1/4}{n^2} = \frac{1}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{j_0^2 + (n-1)(n-3)/4}{n^2}.$$

Таким образом, (4.26) влечет

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

Теорема 4.5 доказана. Пользуясь (4.26) и (4.27), получаем

Следствие 4.5.1 *Наилучшая из возможных константа $c(n)$ для шаров имеет следующие свойства:*

$$c(n) = O(n^2) \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \qquad \textit{и} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{j_{n/2-1}^2 - 1/4} = 1.$$

Следующее неравенство типа Брезиса-Маркуса в трехмерном шаре B_3 содержит две точных константы.

Теорема 4.6 ([65]). *Пусть* $0 < m < \infty$ *и* $0 \le \nu \le 1/m$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(B_3)$

$$\int_{B_3} |\nabla u(x)|^2\,dx \ \ge\ \frac{1}{4}\int_{B_3}\left\{\frac{1-\nu^2 m^2}{(1-|x|)^2} + \frac{m^2 j_\nu^2}{(1-|x|)^{2-m}}\right\}|u(x)|^2\,dx.$$

Константа $(1-\nu^2 m^2)/4$ *и константа* $m^2 j_\nu^2/4$ *являются точными для всех допустимых значений параметров* m *и* ν.

Кроме того, в случае $\nu > 0$ *равенство имеет место для функций* $u_{m,\nu} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_3)$, *определенных равенством*

$$u_{m,\nu}(x) = C\frac{\sqrt{1-|x|}}{|x|}J_\nu\left(j_\nu(1-|x|)^{m/2}\right), \quad C = const.$$

Доказательство теоремы 4.6. В доказательстве теоремы 4.6 используются приемы из доказательства случая (iii) теоремы 4.5. Для $u \in C_0^1(B_3)$ рассматриваем функции f, определенные равенством

$$f(t) = u((1-t)\omega), \qquad 0 \le t \le 1,$$

и применяем лемму 4.1, выбирая $n = 3$, $y(t) = \sqrt{t}\,J_\nu\left(j_\nu t^{m/2}\right)$. Так как $f_0(t) = y(t)/(1-t)$, то

$$\mu_3(t) = (1-t)^2\frac{f_0'(t)}{f_0(t)} = \frac{(1-t)^2}{2t} + \frac{m}{2}t^{m/2-1}j_\nu(1-t)^2\frac{J_\nu'\left(j_\nu t^{m/2}\right)}{J_\nu\left(j_\nu t^{m/2}\right)} + 1 - t$$

и $f(t) = O(t^2)$ при $t \to 0^+$, имеем, что $B(f) = 0$. Пользуясь уравнением Бесселя (см., например, [92])

$$y'' + \left(\frac{1-\nu^2 m^2}{4t^2} + \frac{m^2 j_\nu^2}{4t^{2-m}}\right)y = 0$$

для вычисления $K_3(t)$ в лемме 4.1, получаем

$$K_3(t) = \left(\frac{1-\nu^2 m^2}{4t^2} + \frac{m^2 j_\nu^2}{4t^{2-m}} \right).$$

Применяя лемму 4.1 к функциям $f(t) = u((1-t)\omega)$ и интегрируя по единичной сфере как в доказательстве случая (iii) теоремы 4.5, легко получаем неравенство теоремы 4.6. Точность постоянных в случае $\nu = 0$ получается так же, как и при доказательстве случая (iii) теоремы 4.5. Если же $\nu > 0$, то

$$f_0(t) = \frac{\sqrt{t}}{1-t}\, J_\nu(j_\nu t^{m/2}) = \frac{\sqrt{t}}{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k j_\nu^{2k+\nu} t^{(2k+\nu)m/2}}{2^{2k+\nu}\, k!\, \Gamma(k+1+\nu)}.$$

Поэтому $f_0 \in C^1(0,1]$ и интеграл $I(f_0) = \int_0^1 f_0'^2(t)(1-t)^2\, dt$ конечен в силу условия $f_0'^2(t) = O(t^{-1+m\nu})$ вблизи точки $t = 0$. Ясно, что $u_{m,\nu} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1\,(B_3)$ в случае $\nu > 0$. Так как $A(f_0) = 0$ и $B(f_0) = 0$ в случае $\nu > 0$, то для функций $f_{m,\nu} = C f_0$ имеем равенство

$$\int_0^1 f_{m,\nu}'^2(t)(1-t)^2\, dt = \int_0^1 \left(\frac{1-\nu^2 m^2}{4t^2} + \frac{m^2 j_\nu^2}{4t^{2-m}} \right) f_{m,\nu}^2(t)(1-t)^2\, dt.$$

Интегрируя по сфере, получаем

$$\int_{B_3} |\nabla u_{m,\nu}(x)|^2\, dx \;=\; \frac{1-\nu^2 m^2}{4} \int_{B_3} \frac{|u_{m,\nu}(x)|^2}{(1-|x|)^2}\, dx$$

$$+ \frac{m^2 j_\nu^2}{4} \int_{B_3} \frac{|u_{m,\nu}(x)|^2}{(1-|x|)^{2-m}}\, dx.$$

Теорема 4.6 доказана.

4.3 О критериях положительности трех констант

Отметим некоторые исторические сведения. Ф. Реллих [109] доказал, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \neq 2$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 \, dx \geq \frac{n^2(n-4)^2}{16} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^4} dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \qquad (4.28)$$

и, кроме того, неравенство верно и при $n = 2$, если пробные функции удовлетворяют дополнительным условиям

$$\int\limits_0^{2\pi} u(r\cos\theta,\ r\sin\theta) e^{i\theta} \, d\theta = 0. \qquad (4.29)$$

В дополнение к этим фактам Ф. Реллих доказал [109], что постоянная $n^2(n-4)^2/16$ является точной при любом $n \neq 2$. Им также доказано, что при $n = 2$ неравенство (4.28) перестает быть верным без условий (4.29), даже если постоянную 1 заменить на любую постоянную $\varepsilon \in (0, 1/4)$, т. е. в этом случае его неравенство теряет смысл.

Имеется обширная литература по обобщениям неравенства (4.28) и его усилению дополнительным положительным слагаемым в правой части. В основном исследуются прямые аналоги и усиления (4.28) в области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (см., например, [74] и библиографию в ней). Мы рассмотрим следующее неравенство типа Реллиха в произвольных областях $\Omega \subset \mathbb{C}$:

$$\iint_\Omega |\Delta u|^2 \, dxdy \geq C_2(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{\operatorname{dist}^4(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (4.30)$$

где u – вещественнозначная функция, а постоянная $C_2(\Omega)$ выбрана наибольшей из возможных.

М. П. Овен [101] доказал, что неравенство (4.30) справедливо в любой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с константой $C_2(\Omega) = 9/16$. Поскольку $\operatorname{dist}(z, \partial(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = |z|$, то из результатов Реллиха следует, что $C_2(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$, т. е. неравенство (4.30) не является содержательным для области $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Возникает естественная задача: *найти критерий положительности константы $C_2(\Omega)$ и оценить $C_2(\Omega)$ в зависимости от геометрических характеристик области.*

Рассмотрим также в областях $\Omega \subset \mathbb{C}$ следующее, родственное к (4.30), неравенство

$$\iint_\Omega \operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega) |\Delta u|^2 \, dxdy \geq C_2^*(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)}, \qquad (4.31)$$

где постоянная $C_2^*(\Omega)$ выбрана наибольшей из возможных при условии, что это неравенство было бы справедливо для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

В этом пункте будут описаны критерии положительности констант $C_2(\Omega) \in [0, \infty)$ и $C_2^*(\Omega) \in [0, \infty)$, опубликованные автором в статье [53]. Однако, необходимо рассмотреть сначала более простой случай. Пусть $c_2(2, \Omega) \in [0, \infty)$ – наибольшая из возможных постоянная в неравенстве типа Харди

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 \, dxdy \geq c_2(2, \Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.32)$$

Справедливы две следующих теоремы.

Теорема 4.7 (см. [81] и [52]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Константа $c_2(2, \Omega)$ является положительным числом тогда и только тогда, когда $\partial\Omega$ – равномерно совершенное множество в $\overline{\mathbb{C}}$.

Нам потребуется хорошо известная постоянная

$$c_0 = \frac{\Gamma(1/4)^{1/4}}{4\pi^2} \approx 4.38.$$

Пункт 1 следующей теоремы доказан А. Анконой [50], пункты 2 и 3 принадлежат автору.

Теорема 4.8 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, $\Omega \neq \mathbb{C}$, и пусть граница $\partial\Omega$ этой области является равномерно совершенным множеством в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Если Ω является односвязной областью, то

$$c_2(2,\Omega) \geq \frac{1}{16}. \tag{4.33}$$

2) Если Ω является двусвязной областью, то

$$c_2(2,\Omega) \geq \frac{1}{4\left(2M_0(\Omega) + 1 + \sqrt{2}\right)^2}. \tag{4.34}$$

3) Если Ω является произвольной областью, то

$$c_2(2,\Omega) \geq \frac{1}{16\left(\pi M_0(\Omega) + c_0\right)^4}. \tag{4.35}$$

Доказательство теоремы 4.8. Если область $\Omega \subset \mathbb{C}$ является односвязной или двусвязной областью гиперболического типа, то

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 \, dxdy \geq \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{R^2(z,\partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

поэтому

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 \, dxdy \geq \alpha^2(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

С учетом максимальности $c_2(2,\Omega)$ получаем $c_2(2,\Omega) \geq \alpha^2(\Omega)$. Но для односвязной области $\alpha(\Omega) \geq 1/4$ по теореме Кёбе об одной четвертой. Для двусвязной области Ω, как доказано в теореме 2.15, справедлива оценка $\alpha(\Omega) \geq 4M_0(\Omega) + 2 + 2\sqrt{2}$. Таким образом, первые два пункта теоремы доказаны.

Докажем пункт 3. В силу теоремы 2.16 имеем

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\, dxdy \geq 2 \iint_\Omega \frac{|u(z)|}{R^2(z,\Omega)}\, dxdy, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

После замены u на u^2 и оценки $R^2(z,\Omega) \leq \operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)/\alpha^2(\Omega)$ получаем отсюда

$$\iint_\Omega \frac{|u|\,|\nabla u| dxdy}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)}\, dxdy \geq \alpha^2(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Применяя элементарную оценку

$$\frac{2|u|\,|\nabla u|}{\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)} \leq \alpha^2(\Omega)\frac{|u|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} + \frac{|\nabla u|^2}{\alpha^2(\Omega)},$$

приходим к неравенству

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2\, dxdy \geq \alpha^4(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2 dxdy}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Следовательно, $c_2(2,\Omega) \geq \alpha^4(\Omega)$ в случае произвольной области гиперболического типа. Остается применить теорему 2.13, чтобы завершить доказательство пункта 3 теоремы.

Замечание 4.1 *Отметим, что для колец $A(z_0; r_1, r_2)$ в статье* [54] *автором определены точные значения $c_2(2, A(z_0; r_1, r_2))$ в зависимости от модуля $(2\pi)^{-1}\ln(r_2/r_1)$.*

Доказательство теоремы 4.7. Очевидно, достаточность условия равномерной совершенности границы области, т. е. достаточность условия $M_0(\Omega) < \infty$ для положительности константы $c_2(2,\Omega)$ вытекает из теоремы 4.8 с оценками $c_2(2,\Omega)$ снизу при условии конечности евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$.

Докажем необходимость. Пусть $c_2(2,\Omega) > 0$. Требуется обосновать неравенство $M_0(\Omega) < \infty$. Покажем, что справедливо более строгое неравенство $M_0(\Omega) \le m := 1/\left(2\sqrt{c_2(2,\Omega)}\right)$.

Предположим обратное: пусть $M_0(\Omega) > m$. Но тогда по определению евклидова максимального модуля существует кольцо

$$A_0 = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\} \subset \Omega,$$

такое, что A_0 разделяет $\partial\Omega$, $z_0 \in \partial\Omega$, $0 < a < b < \infty$ и

$$m < M(A_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} < M_0(\Omega).$$

Поскольку неравенство $\mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \le |z - z_0|$ справедливо для любой точки $z \in \Omega$, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(A_0)$ получаем

$$\iint_{A_0} |\nabla u|^2 \, dxdy \ge c_2(2,\Omega) \iint_{A_0} \frac{|u|^2 dxdy}{|z - z_0|^2}. \tag{4.36}$$

Рассматривая полярные координаты с центром в точке $z_0 \in \partial\Omega$ и неравенство (4.36) в полярных координатах для радиальных функций $u_h(z) = u_h(z_0 + |z - z_0|) = h(r)$, $r = |z - z_0|$, $h \in C_0^\infty(A_0)$, получаем неравенство

$$\int_a^b |h'(r)|^2 \, r \, dr \ge c_2(2,\Omega) \int_a^b \frac{|h(r)|^2}{r} dr \quad \forall h \in C_0^\infty(a,b). \tag{4.37}$$

Совершим замену переменных. А именно, перейдем к новым функциям $v \in C_0^\infty(0,\pi)$, определяемым равенствами $v(t) = h(r)$, где $r = b \, exp\,(-2M(A_0)\, t)$, $0 \le t \le \pi$. Нетрудные вычисления приводят к неравенству

$$\frac{1}{4M^2(A_0)}\int_0^\pi |v'(t)|^2\,dt \geq c_2(2,\Omega)\int_0^\pi |v(t)|^2 dt \quad \forall v\in C_0^\infty(0,\pi),$$

равносильному (4.37). Это неравенство должно быть справедливо и для функций, входящих в замыкание семейства $C_0^\infty(0,\pi)$ по соответствующей норме, в частности, для функции $v_0(t)=\sin t$. Для этой функции интегралы вычисляются явно, и мы имеем неравенство $4M^2(A_0)\leq 1/c_2(2,\Omega)$, что противоречит выбору числа m. Таким образом, теорема 4.7 доказана.

Теорема 4.9 *Пусть $\Omega\subset\mathbb{C}$ – область, $\Omega\neq\mathbb{C}$. Константа $C_2(\Omega)$ является положительным числом тогда и только тогда, когда $\partial\Omega$ – равномерно совершенное множество в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство теоремы 4.9. Пусть $C_2(\Omega)$ является положительным числом. Докажем, что

$$M_0(\Omega)\leq m := \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{C_2(\Omega)}}\right\}, \tag{4.38}$$

где

$$\alpha = \inf_{v\in C_0^\infty(0,\pi), v\not\equiv 0}\frac{\int\limits_0^\pi (|v''(t)|+|v'(t)|)^2\,dt}{\int\limits_0^\pi |v(t)|^2 dt}\in[1,\infty). \tag{4.39}$$

Неравенство $\alpha\geq 1$ получается из неравенства Пуанкаре с учетом тривиального соотношения $\int\limits_0^\pi (|v''(t)|+|v'(t)|)^2\,dt \geq \int\limits_0^\pi |v'(t)|^2\,dt$. Можно показать, что $\alpha\leq 4$, но мы на этом не останавливаемся, так как для нас важно лишь то, что α является положительным числом.

Предположим, что (4.38) неверно, т. е. $M_0(\Omega)\in(m,\infty]$. Тогда существует кольцо $A_0=\{z\in\mathbb{C} : a<|z-z_0|<b\}\subset\Omega$, такое,

что $z_0 \in \partial\Omega$, $0 < a < b < \infty$ и

$$m < M(A_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} < M_0(\Omega).$$

Так как $z_0 \in \partial\Omega$, то $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \leq |z - z_0|$ для любой точки $z \in \Omega$. Учитывая это неравенство и включение $A_0 \subset \Omega$, из (4.30) для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(A_0)$ получаем

$$\iint_{A_0} |\Delta u|^2 \, dxdy \geq C_2(\Omega) \iint_{A_0} \frac{|u|^2}{|z - z_0|^4} dxdy. \qquad (4.40)$$

Рассмотрим полярные координаты с центром $z_0 = x_0 + iy_0) \in \partial\Omega$. Тогда $A_0 = \{z_0 + re^{i\theta} \in \mathbb{C} : a < r < b,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Запишем неравенство (4.40) в полярных координатах для функций $u_h \in C_0^\infty(A_0)$ специального вида. При выборе u_h мы будем пользоваться одной идеей Реллиха [109], а именно, полагаем

$$u_h(x, y) := (x - x_0)\, h(r) = r\, h(r)\, \cos\theta, \quad h \in C_0^\infty(a, b).$$

Тогда $\Delta u_h = [rh''(r) + 3h'(r)] \cos\theta$, и неравенство (4.40) для функций $u_h \in C_0^\infty(A_0)$ равносильно следующему соотношению

$$\int_a^b |rh'' + 3h'|^2 \, r\, dr \geq C_2(\Omega) \int_a^b \frac{|h|^2}{r} dr \quad \forall h \in C_0^\infty(a, b). \qquad (4.41)$$

Рассмотрим функции $v \in C_0^\infty(0, \pi)$, определяемые равенствами $v(t) = h(r)$, где $r = b\, exp - [2M(A_0)\, t]$, $0 \leq t \leq \pi$. Непосредственные вычисления приводят к неравенству

$$\frac{\int_0^\pi |v'' - 4M(A_0)\, v'|^2 \, dt}{16 M^4(A_0)} \geq C_2(\Omega) \int_0^\pi |v|^2 dt \quad \forall v \in C_0^\infty(0, \pi),$$

равносильному (4.41). Отсюда с учетом $M(A_0) > m \geq 1/4$ получаем неравенство

$$\frac{\int_0^\pi (|v''| + |v'|)^2\,dt}{M^2(A_0)} \geq C_2(\Omega) \int_0^\pi |v|^2 dt \quad \forall v \in C_0^\infty(0,\pi). \qquad (4.42)$$

На основании неравенства (4.42) и определения постоянной α имеем неравенство $M^2(A_0) \leq \alpha / C_2(\Omega)$, поэтому

$$M(A_0) \leq \sqrt{\alpha / C_2(\Omega)} \leq m,$$

где числа m и $\alpha \in [1, \infty)$ определены формулами (4.38) и (4.39) соответственно. Получили противоречие, так как $M(A_0) > m$ в силу выбора кольца A_0.

Достаточность условия $M_0(\Omega) < \infty$ для положительности константы $C_2(\Omega)$ вытекает из следующей теоремы, где даны явные оценки $C_2(\Omega)$ снизу в зависимости от евклидова максимального модуля $M_0(\Omega)$.

Теорема 4.10 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, $\Omega \neq \mathbb{C}$, и пусть граница $\partial\Omega$ этой области является равномерно совершенным множеством в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Если Ω является односвязной областью, то

$$C_2(\Omega) \geq \frac{1}{16}. \qquad (4.43)$$

2) Если Ω является двусвязной областью, то

$$C_2(\Omega) \geq \frac{1}{4\left(2M_0(\Omega) + 1 + \sqrt{2}\right)^2}. \qquad (4.44)$$

3) Если Ω является произвольной областью, то

$$C_2(\Omega) \geq \frac{1}{16\,(\pi M_0(\Omega) + c_0)^4}. \qquad (4.45)$$

Доказательство теоремы 4.10. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – произвольная область, не совпадающая со всей плоскостью. Будем рассматривать лишь вещественнозначные функции $v, u \in C_0^\infty(\Omega)$. Для обоснования неравенств (4.43), (4.44) и (4.45) нам потребуется ряд различных фактов. Первые три шага доказательства являются общими для всех трех неравенств.

Пусть $z = x + iy \in \Omega$. В силу тождества О. А. Ладыженской [30] для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ можем записать

$$\iint_\Omega |\Delta v|^2\, dxdy = \iint_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 \right\} dxdy,$$

или, что то же самое,

$$\iint_\Omega |\Delta v|^2\, dxdy = \iint_\Omega \left(|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2\right) dxdy, \tag{4.46}$$

где

$$u_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad u_2 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Применяя неравенство (4.32) к функциям $u = u_1$, $u = u_2$ и суммируя, в силу равенств (4.46) получаем

$$\iint_\Omega |\Delta v|^2\, dxdy \geq c_2(2, \Omega) \iint_\Omega \frac{|u_1|^2 + |u_2|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dxdy,$$

следовательно,

$$\iint_\Omega |\Delta v|^2\, dxdy \geq c_2(2, \Omega) \iint_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} dxdy. \tag{4.47}$$

Как следствие универсального неравенства, представленного теоремой 2.18 с постоянной $(s-2)^p/p^p = 1$ для параметров $p = 2$ и $s = 4$, имеем, что для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, справедливо следующее неравенство типа Харди

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla v|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)}\,dxdy \geq \iint_\Omega \frac{|v|^2 dxdy}{\operatorname{dist}^4(z,\partial\Omega)} \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (4.48)$$

Комбинируя (4.47) и (4.48), получаем

$$\iint_\Omega |\Delta v|^2\,dxdy \geq c_2(2,\Omega)\iint_\Omega \frac{|v|^2 dxdy}{\operatorname{dist}^4(z,\partial\Omega)} \qquad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Следовательно,

$$C_2(\Omega) \geq c_2(2,\Omega). \qquad (4.49)$$

Неравенства (4.43), (4.44) и (4.45) являются следствием (4.49) и теоремы 4.8. Этим завершается доказательство теорем 4.9 и 4.10.

Случаю $M_0(\Omega) = 0$ соответствует

Следствие 4.10.1 *Предположим, что* $\Omega \subset \mathbb{C}$ – *область,* $\Omega \neq \mathbb{C}$ *и для любого* $w \in \partial\Omega$ *не существует окружности вида*

$$L = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| = r_w > 0\},$$

лежащей в Ω *и разделяющей границу этой области. Тогда*

$$C_2(\Omega) \geq \frac{16\pi^8}{\Gamma(1/4)}.$$

Выделим также один случай весьма сложной области, для которой евклидов максимальный модуль M_0 легко вычисляется.

Следствие 4.10.2 *Пусть* K – *классическое канторово множество, лежащее на отрезке* $[0,1]$. *Если*

$$\Omega_K := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0 \in (1,3]\} \setminus K,$$

то

$$C_2(\Omega_K) \geq \frac{16\pi^8}{\left(2\pi^2 \ln 3 + \Gamma(1/4)^{1/4}\right)^4}.$$

Рассмотрим теперь неравенство (4.31) с постоянной $C_2^*(\Omega)$. Сравним сначала оптимальные постоянные $C_2^*(\Omega)$ и $c_2(2,\Omega)$.

Лемма 4.2 *Для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$,*

$$\sqrt{C_2^*(\Omega)} \geq c_2(2,\Omega). \qquad (4.50)$$

Доказательство леммы 4.2. Для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ по формуле Грина

$$\iint_\Omega (v\,\Delta v + |\nabla v|^2) dxdy = 0.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, получаем отсюда

$$\sqrt{\iint_\Omega \delta^2 |\Delta v|^2\, dxdy}\sqrt{\int_\Omega \frac{|v|^2}{\delta^2} dxdy} \geq \iint_\Omega |\nabla v|^2\, dxdy \geq$$

$$\geq c_2(2,\Omega) \iint_\Omega \frac{|v|^2}{\delta^2} dxdy, \quad \text{где} \quad \delta = \operatorname{dist}(z,\partial\Omega).$$

Следовательно, для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega \operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)|\Delta v|^2\, dxdy \geq c_2^2(2,\Omega) \iint_\Omega \frac{|v|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} dxdy,$$

что и доказывает (4.50).

Теорема 4.11 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Константа $C_2^*(\Omega)$ является положительным числом тогда и только тогда, когда $\partial\Omega$ является равномерно совершенным множеством в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с равномерно совершенной границей справедливы следующие утверждения.

1) Если Ω является односвязной областью, то

$$C_2^*(\Omega) \geq \frac{1}{256}. \tag{4.51}$$

2) Если Ω является двусвязной областью, то

$$C_2^*(\Omega) \geq \frac{1}{16\left(2M_0(\Omega) + 1 + \sqrt{2}\right)^4}. \tag{4.52}$$

3) Если Ω является произвольной областью, то

$$C_2^*(\Omega) \geq \frac{1}{256\,(\pi M_0(\Omega) + c_0)^8}. \tag{4.53}$$

Доказательство достаточности и оценок (4.51), (4.52), (4.53). Из равномерной совершенности границы области следует, что евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ является конечной величиной. Пользуясь леммой 4.2 и теоремой 4.8, имеем оценки (4.51), (4.52), (4.53), и, как следствие, получаем положительность $C_2^*(\Omega)$ для области с равномерно совершенной границей.

Доказательство необходимости. Пусть $C_2^*(\Omega) > 0$. Докажем, что

$$M_0(\Omega) \leq m := \frac{1}{2\sqrt[4]{C_2^*(\Omega)}}. \tag{4.54}$$

Предположим обратное: $M_0(\Omega) > m$. Тогда существует кольцо $A_0 = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\} \subset \Omega$, такое, что $z_0 \in \partial\Omega$, $0 < a < b < \infty$ и

$$m < M(A_0) = \frac{1}{2\pi} \ln\frac{b}{a} < M_0(\Omega).$$

Так как $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \leq |z - z_0|$ для любой точки $z \in \Omega$, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(A_0)$ получаем

$$\iint_{A_0} |z - z_0|^2 |\Delta u|^2 \, dxdy \geq C_2^*(\Omega) \iint_{A_0} \frac{|u|^2 dxdy}{|z - z_0|^2}. \qquad (4.55)$$

Рассмотрим полярные координаты с центром в точке $z_0 \in \partial\Omega$. Запишем неравенство (4.55) в полярных координатах для радиальных функций $u_h(z) = u_h(z_0 + |z - z_0|) = h(r)$, $h \in C_0^\infty(A_0)$. Имеем: $\Delta h = h'' + h'(r)/r$ и и неравенство (4.55) для функций $u_h \in C_0^\infty(A_0)$ равносильно следующему соотношению

$$\int_a^b |rh'' + h'|^2 \, r \, dr \geq C_2^*(\Omega) \int_a^b \frac{|h|^2}{r} dr \quad \forall h \in C_0^\infty(a, b). \qquad (4.56)$$

Рассмотрим теперь функции $v \in C_0^\infty(0, \pi)$, определяемые равенствами $v(t) = h(r)$, где $r = b \, exp\,(-2M(A_0)\, t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Непосредственные вычисления приводят к неравенству

$$\frac{1}{16M^4(A_0)} \int_0^\pi |v''(t)|^2 \, dt \geq C_2^*(\Omega) \int_0^\pi |v(t)|^2 dt \quad \forall v \in C_0^\infty(0, \pi),$$

равносильному (4.56). Стандартные рассуждения показывают, что это неравенство должно быть справедливо, в частности, и для функции $v_0(t) = \sin t$. Следовательно, имеем неравенство

$$16M^4(A_0) \leq 1/C_2^*(\Omega),$$

поэтому $2M(A_0) \leq \sqrt[4]{1/C_2(\Omega)} \leq 2m$, где число m определено формулой (4.54). Получили противоречие, этим и завершается доказательство теоремы 4.11.

Следствие 4.11.1 *Для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, имеем:*

$$M_0(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow C_2(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow C_2^*(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow c_2(2, \Omega) > 0.$$

4.4 Полигармонические операторы

Пусть Ω – область на плоскости $\mathbb{C}$. Предполагаем, что $\Omega \neq \mathbb{C}$, тогда корректно определено расстояние $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ от точки $z \in \Omega$ до границы области. Замена гиперболического радиуса $R(z, \Omega)$ функцией расстояния $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ приводит к квазигиперболической геометрии, изучение которой можно проводить в рамках евклидовой геометрии. В связи с этим следует отметить, что функция расстояния является дифференцируемой почти всюду по теореме Радемахера [108]. Известно также, что $|\nabla \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)| = 1$ почти всюду в области Ω.

Пусть $m \geq 2$ – фиксированное натуральное число. Для гладких функций $u \in C^\infty(\Omega)$ нам потребуются известные полигармонические операторы:

$$\Delta^{m/2} u := \begin{cases} \Delta^j u, & \text{если } m = 2j \text{ – четное число,} \\ \nabla \Delta^j u, & \text{если } m = 2j+1 \text{ – нечетное число,} \end{cases}$$

с формальным дополнительным соглашением $\Delta^{1/2} u := \nabla u$. Таким образом, функция $\Delta^{m/2} u$ определена для любого натурального числа m. Отметим, что по полигармоническим операторам имеется обширная литература (см., например, книгу Ф. Газзолы, Х.-Ч. Грюнау и Г. Сюирса [84]).

В этом пункте для вещественнозначных функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрено неравенство

$$\iint_\Omega |\Delta^{m/2} u|^2 dx\, dy \geq C_2^{(m)}(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2}{(\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^{2m}} dx\, dy, \qquad (4.57)$$

где постоянная $C_2^{(m)}(\Omega) \in [0, \infty)$ выбрана наибольшей из возможных, т. е.

$$C_2^{(m)}(\Omega)=\inf_{u\in C_0^\infty(\Omega),u\not\equiv 0}\frac{\iint_\Omega|\Delta^{m/2}u|^2dx\,dy}{\iint_\Omega|u|^2(\mathrm{dist}(z,\partial\Omega))^{-2m}dx\,dy}.$$

Очевидно, величины $C_2^{(m)}(\Omega)$ являются квазигиперболическими характеристиками области Ω. Кроме того,

$$C_2^{(m)}(\Omega)=C_2^{(m)}(a\Omega+b),\quad \text{где }\ a\Omega+b=\{az+b:z\in\Omega\}.$$

Приведем точную оценку $C_2^{(m)}(\Omega)$ сверху для областей, имеющих хотя бы одну "регулярную" граничную точку.

По-видимому, справедливо следующее утверждение.

Обобщенная гипотеза Дэвиса. *Пусть $m\in\mathbb{N}$ и $\Omega\subset\mathbb{C}$ – произвольная область, не совпадающая со всей плоскостью. Тогда*

$$C_2^{(m)}(\Omega)\le((2m-1)!!)^2/4^m.$$

Эта гипотеза для $m=1$ была высказана Е. Б. Дэвисом [78] (см. также статью автора и А. Лаптева [58] и библиографию в ней), но не доказана до сих пор. В статье [78] неравенство $C_2^{(1)}(\Omega)\le 1/4$ доказано при наличии дополнительного условия: область Ω имеет хотя бы одну граничную точку, регулярную в определенном смысле.

Наиболее простые и эффективные условия регулярности граничной точки даны в работе автора и И. К. Шафигуллина [18]. Приведем необходимые нам определения из [18] для случая области $\Omega\subset\mathbb{C}$. Отметим, что в [18] рассмотрен более общий случай областей $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ при $n\ge 2$.

Определение 4.1 *Пусть $\zeta_0\in\partial\Omega$, и пусть существуют два круга*

$$D^+=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r_0\}\subset\Omega,$$

$$D^{-} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0'| < r_0\} \subset \mathbb{C} \setminus \Omega,$$

такие, что $|\zeta_0 - z_0| = |\zeta_0 - z_0'| = r_0 > 0$ *и* $\zeta_0 = (z_0 + z_0')/2$, *т. е.* ζ_0 *является общей граничной точкой этих кругов. Тогда будем говорить, что точка* $\zeta_0 \in \partial\Omega$ *двусторонне достижима кругами.*

Потребуется также определение S-регулярной граничной точки из [18]. Пусть $\varepsilon \in (0, 1/4)$, и пусть ζ_0, z_0 – такие точки $\mathbb{C}$, что

$$r_0 := |z_0 - \zeta_0| > 0.$$

Определим усеченный круговой сектор $S_{\zeta_0}(z_0, \varepsilon)$ как множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих двум следующим условиям:

$$r_0(1 - 2\sqrt{\varepsilon}) < |z - z_0| < r_0,$$

$$\cos\sqrt{\varepsilon} < \frac{\Re[(z - z_0)(\overline{\zeta_0} - \overline{z_0})]}{r_0|z - z_0|} \leq 1.$$

Определение 4.2 *Точку* $\zeta_0 \in \partial\Omega$ *назовем* S*-регулярной граничной точкой области* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *если существуют точка* $z_0 \in \mathbb{C}$, *постоянные* $\varepsilon_0 \in (0, 1/4)$ *и* $C_0 > 0$ *такие, что для любого числа* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *выполняются условия:*

1) $S_{\zeta_0}(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$*;*

2) $r_0 - |z - z_0| \leq \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \leq r_0(1 + C_0\varepsilon) - |z - z_0|$ *для* $r_0 = |\zeta_0 - z_0|$ *и любой точки* $z \in S_{\zeta_0}(z_0, \varepsilon)$.

Легко проверить, что если граничная точка $\zeta_0 \in \partial\Omega$ двусторонне достижима кругами, то она является S-регулярной граничной точкой для области Ω.

Для $m = 1$ следующая теорема доказана в статье [18], а в общем случае – в статье [10].

Теорема 4.12 *Предположим, что* $m \in \mathbb{N}$ *и область* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *имеет хотя бы одну* S*-регулярную граничную точку. Тогда справедливо неравенство* $C_2^{(m)}(\Omega) \leq ((2m-1)!!)^2/4^m$.

Доказательство теоремы 4.12. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{C}$ имеет хотя бы одну S-регулярную граничную точку $\zeta_0 \in \partial\Omega$.

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(S_{\zeta_0}(z_0, \varepsilon))$ можем записать неравенство

$$\iint_{S_{\zeta_0}(z_0,\varepsilon)} |\Delta^{m/2} u|^2 \, dxdy \geq C_2^{(m)}(\Omega) \iint_{S_{\zeta_0}(z_0,\varepsilon)} \frac{|u|^2}{\delta^{2m}} dxdy, \qquad (4.58)$$

где $\delta = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \leq r_0(1 + C_0\varepsilon) - |z - z_0|$.

Константа $C_2^{(m)}(\Omega)$ и определение S-регулярной граничной точки инвариантны по отношению к линейным конформным отображениям области. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $z_0 = 0$ – начало координат, $\zeta_0 = 1$ является S-регулярной граничной точкой области Ω. Тогда $r_0 = 1$, в полярных координатах $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ множество $S_1(0, \varepsilon) \subset \Omega_0$ описано неравенствами:

$$\rho := 1 - 2\sqrt{\varepsilon} < r < 1, \quad -\sqrt{\varepsilon} < \theta < \sqrt{\varepsilon}.$$

Фиксируем некоторую вещественнозначную функцию

$$g_0 \in C_0^\infty(-1, 1), \quad g_0 \not\equiv 0,$$

и определим функции $g \in C_0^\infty(-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$ равенством

$$g(\theta) = g_0(\theta/\sqrt{\varepsilon}).$$

Нам потребуются постоянная

$$C' = \max_{0\leq k\leq m} \int_{-1}^1 |g_0^{(k)}(\tau)|^2 d\tau \Bigg/ \int_{-1}^1 |g_0(\tau)|^2 d\tau \geq 1 \qquad (4.59)$$

и равенства

$$\int_{-1}^1 g_0^{(2k)}(\tau) g_0^{(2k+2p)}(\tau) d\tau =$$

$$= (-1)^p \int_{-1}^{1} |g_0^{(2k+p)}(\tau)|^2 d\tau, \quad k, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{4.60}$$

получаемые интегрированием по частям. Положим

$$f_h(r,\theta) = h(r)g(\theta), \quad H(r) := h''(r) + \frac{1}{r}h'(r),$$

где h – произвольная функция из семейства $C_0^\infty(\rho, 1)$. Тогда

$$u = f_h \in C_0^\infty(S_1(0,\varepsilon)),$$

$$\Delta f_h = H(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2}h(r)g''(\theta).$$

Запишем неравенство (4.58) для $u = f_h$ и совершим некоторые преобразования получаемого неравенства. При вычислениях придется рассмотреть отдельно случаи четного и нечетного $m \in \mathbb{N}$.

Случай $m = 2j$, $j \in \mathbb{N}$. Для удобства введем оператор дифференцирования D_2, определяя его равенством

$$D_2 h = h''(r) + \frac{1}{r}h'(r) \equiv \frac{(r\,h'(r))'}{r}.$$

Поскольку

$$\Delta f_h = (D_2 h(r))g(\theta) + r^{-2}h(r)g''(\theta) =$$

$$= (D_2 h(r))g_0(\tau) + r^{-2}h(r)\varepsilon^{-1}g_0''(\tau), \ \tau = \theta/\sqrt{\varepsilon},$$

то по индукции получаем следующую структурную формулу:

$$\Delta^j f_h = \sum_{k=0}^{j} a_{jk}(r) g^{(2k)}(\theta) = \sum_{k=0}^{j} \frac{a_{jk}(r)}{\varepsilon^k} g_0^{(2k)}(\tau), \quad \tau = \theta/\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.61}$$

Легко видеть, что

$$a_{j0}(r) = D_2^j h(r), \quad a_{jj}(r) = \frac{h^j(r)}{r^{2j}\,\varepsilon^j}, \quad r \in (\rho, 1),$$

для $1 \le k \le j-1$ коэффициенты определяются формулами вида

$$a_{jk}(r) = \sum_{\nu=0}^{2j-2k} \frac{\alpha_{jk\nu} h^{(\nu)}(r)}{r^{\beta_{jk\nu}}},$$

где $\alpha_{jk\nu}$, $\beta_{jk\nu}$ – вполне определенные числа, причем $0 \le \beta_{jk\nu} \le 2j$. В дальнейшем нам потребуются лишь оценки вида

$$|a_{j0}(r)| \le |h^{(2j)}(r)| + \frac{C''}{r^{2j}} \sum_{\nu=0}^{2j-1} |h^{(\nu)}(r)|,$$

$$|a_{jk}(r)| \le \frac{C''}{r^{2j}} \sum_{\nu=0}^{2j-2k} |h^{(\nu)}(r)|, \tag{4.62}$$

где $1 \le k \le j$, $r \in (\rho, 1)$, $C'' \ge 1$ – некоторая постоянная. Для $S_{\zeta_0}(z_0, \varepsilon) = S_1(0, \varepsilon)$ и $f = f_h$ неравенство (4.58) запишется в виде

$$\sum_{k=0}^{j} \sum_{\nu=0}^{j} \int_\rho^1 \frac{a_{jk}(r) a_{j\nu}(r)}{\varepsilon^{k+\nu}} r\,dr \int_{-1}^1 g_0^{(2k)}(\tau) g_0^{(2\nu)}(\tau) d\tau \ge$$

$$\ge C_2^{(2j)}(\Omega) \int_\rho^1 \frac{h^2(r)}{(1 - r + C_0\varepsilon)^{4j}} r\,dr \int_{-1}^1 g_0^2(\tau)\,d\tau.$$

Делим обе части этого неравенства на число $\int_{-1}^1 g_0^2(\tau)\,d\tau > 0$ и оцениваем сверху левую часть получаемого неравенства. С использованием формул (4.60) и (4.59) получаем

$$\int_\rho^1 \left(|a_{j0}(r)| + C' \sum_{k=1}^{j} \frac{|a_{jk}(r)|}{\varepsilon^k} \right)^2 r\,dr \ge$$

$$\geq C_2^{(2j)}(\Omega)\int_\rho^1 \frac{h^2(r)}{(1-r+C_0\varepsilon)^{4j}} r\,dr,$$

и с учетом оценок (4.61) и неравенств $\rho \leq r \leq 1$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1/4$ будем иметь

$$\int_\rho^1 \left(|h^{(2j)}(r)| + \frac{C'C''}{r^{2j}} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \frac{|h^{(\nu)}(r)|}{\varepsilon^{j-\nu/2}} \right)^2 dr \geq$$

$$\geq C_2^{(2j)}(\Omega)\int_\rho^1 \frac{\rho\, h^2(r)\,dr}{(1-r+C_0\varepsilon)^{4j}}.$$

Умножим обе части этого неравенства на $\varepsilon^{2j-1/2}$, сделаем замены переменной и функции по формулам: $r = 1-\sqrt{\varepsilon}t$, $u(t) := h(r)$. Затем переходим к пределу при $\varepsilon \to 0^+$. Непосредственными вычислениями с учетом простых формул $dr = -\sqrt{\varepsilon}dt$,

$$h^{(k)}(r) = (-1)^k \varepsilon^{-k/2} u^{(k)}(t), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

$\rho = 1-2\sqrt{\varepsilon} \to 1$, получаем

$$\int_0^2 \left(|u^{(2j)}(t)| + C'C'' \sum_{k=1}^{2j-1} |u^{(k)}(t)| \right)^2 dt \geq$$

$$\geq C_2^{(2j)}(\Omega)\int_0^2 \frac{u^2(t)}{t^{4j}} dt. \tag{4.63}$$

По построению неравенство (4.63) справедливо для любой функции $u \in C_0^\infty(0,2)$. Поэтому неравенство (4.63) должно иметь место для функции u_γ, определяемой равенством

$$u_\gamma(t) = t^{(4j-1+\gamma)/2}, 0 \leq t \leq 2,$$

при любом положительном γ, так как эта функция лежит в замыкании $C_0^\infty(0,2)$ по норме $\|u^{(2j)}\|_{L^2(0,2)} + \|u/t^{2j}\|_{L^2(0,2)}$. Непосредственные вычисления показывают, что для $m = 2j$

$$\lim_{\gamma\to 0^+} \gamma \int_0^2 \left(|u_\gamma^{(2j)}(t)| + C'C'' \sum_{k=1}^{2j-1} |u_\gamma^{(k)}(t)| \right)^2 dt =$$

$$= \lim_{\gamma\to 0^+} \gamma \int_0^2 \left| u^{(2j)}(t) \right|^2 dt = \frac{(4j-1)^2\,(4j-3)^2 \ldots 1^2}{4^{2j}} = \frac{\left((2m-1)!!\right)^2}{4^m}.$$

Следовательно,

$$\frac{\left((2m-1)!!\right)^2}{4^m} \geq C_2^{(2j)}(\Omega) \lim_{\gamma\to 0^+} \gamma \int_0^2 \frac{u_\gamma^2(t)}{t^{4j}} dt = C_2^{(2j)}(\Omega),$$

что и требовалось доказать в случае четного m.

Случай $m = 2j+1$, $j \in \mathbb{N}$. Схема доказательства та же, что и в предыдущем случае. Имеем

$$|\nabla \Delta^j f_h|^2 = \sum_{k=0}^{j} \frac{\left| a'_{jk}(r) \right|^2}{\varepsilon^{2k}} \left| g_0^{(2k)}(\theta) \right|^2 + \sum_{k=0}^{j} \frac{|a_{jk}(r)|^2}{r^2 \varepsilon^{2k+1}} \left| g_0^{(2k+1)}(\theta) \right|^2.$$

Применяя для $S_{\zeta_0}(z_0, \varepsilon) = S_1(0, \varepsilon)$ и $f = f_h$ неравенство (4.58) в случае $m = 2j+1$ и учитывая (4.59) и структуру коэффициентов $a_{jk}(r)$ и их производных, получаем неравенство вида

$$\int_\rho^1 |h^{(2j+1)}(r)|^2 dr + \frac{C'''}{r^{4j}} \sum_{\nu=0}^{2j} \frac{|h^{(\nu)}(r)|^2 dr}{\varepsilon^{2j+1-\nu/2}} \geq$$

$$\geq C_2^{(2j+1)}(\Omega) \int_\rho^1 \frac{\rho\, h^2(r)\, dr}{(1 - r + C_0 \varepsilon)^{4j+2}},$$

где C''' – некоторая постоянная.

Далее, рассуждая так же, как и в случае четного m, получаем неравенство

$$\int_0^2 |u^{(2j+1)}(t)|dt + C''' \sum_{k=1}^{2j} \int_0^2 |u^{(k)}(t)|^2 dt \geq C_2^{(2j+1)}(\Omega) \int_0^2 \frac{u^2(t)}{t^{4j+2}} dt.$$

Мы подставляем в это неравенство $u(t) = u_\gamma(t) = t^{(4j+1+\gamma)/2}$ и переходим к пределу при $\gamma \to 0^+$. Получаем

$$C_2^{(2j+1)}(\Omega) \leq \lim_{\gamma \to 0^+} \gamma_\gamma \int_0^2 |u^{(2j+1)}(t)|dt = \frac{((2m-1)!!)^2}{4^m},$$

где $m = 2j+1$. Теорема 4.12 доказана.

В завершение этого пункта кратко опишем результаты статьи автора [54], посвященной вычислению точных значений констант $c_2(2,\Omega) = C_2^{(1)}(\Omega)$ для колец в зависимости от их конформных модулей. Напомним, что точное значение $c_2(2,\Omega)$ известно для выпуклых областей (см. подробное описание в [7], [66], [79]). Доказано также, что $c_2(2,\Omega) = 1/4$ для некоторых невыпуклых областей, близких к выпуклым в определенном смысле (см. [7]). Попутно напомним, что остается нерешенной следующая задача Дэвиса [79]: верно ли, что $c_2(2,\Omega) \leq 1/4$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Стимулом к написанию статьи [54] послужил следующий вопрос, заданный 14 ноября 2016 г. А. И. Аптекаревым на семинаре по комплексному анализу (семинаре Гончара): верно ли, что для любого числа $x \in (0, 1/4)$ существует такая область Ω_x, что $c_2(2,\Omega_x) = x$.

Итак, в качестве области Ω рассматриваем концентрические кольца вида $A = A(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

Постоянная $c_2(2, A(z_0; r_1, r_2))$ зависит лишь от конформного модуля $M(A(z_0; r_1, r_2)) := (2\pi)^{-1} \ln(r_2/r_1)$ в силу равенства $c_2(2, A) = c_2(2, aA + b)$, $a \neq 0$. В [54] доказано, что для кольца A с модулем $M(A) = M$ константа $c_2(2, A)$ является непрерывной невозрастающей функцией от модуля $M(A) = M$, причем существуют определенное критическое значение $M^* \approx 0,57298$, непрерывное сюръективное отображение $\gamma : (M^*, \infty) \to (1, 2)$, такие, что

$$c_2(2, A) = \begin{cases} 1/4, & \text{если } M \in (0, M^*]; \\ \gamma(2-\gamma)/4, & \text{если } M \in (M^*, \infty). \end{cases}$$

Ответ на вопрос А. И. Аптекарева оказывается положительным. Отметим также, что кольцо с критическим модулем имеет легко запоминающееся отношение радиусов

$$r_2/r_1 = exp(2\pi M^*) \approx 36,6.$$

Для описания деталей и точных формулировок нам потребуются гамма функция Эйлера, гипергеометрическое уравнение Гаусса $\zeta(1-\zeta)\,u'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)\,\zeta)\;u' - \alpha\beta\,u = 0$ и гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) = 1 + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\beta)}{n!\,\Gamma(n+\gamma)}\;\zeta^n, \quad |\zeta| < 1,$$

с параметрами $\gamma \in [1, 2)$ и

$$\alpha = \alpha(\gamma) = \frac{\gamma + i\sqrt{\gamma(2-\gamma)}}{2},\ \beta = \beta(\gamma) = \frac{\gamma - i\sqrt{\gamma(2-\gamma)}}{2}.$$

Для этих параметров гипергеометрическое уравнение имеет вид

$$\zeta(1-\zeta)\,u'' + (\gamma - (\gamma+1)\,\zeta)\;u' - \frac{\gamma}{2}\,u = 0.$$

Рассматривается лишь одно из решений этого гипергеометрического уравнения. А именно, нам нужна голоморфная гипергеометрическая функция $u = F(\alpha(\gamma), \beta(\gamma); \gamma; .) : \mathbb{C} \setminus [1, \infty) \to \mathbb{C}$, представленная классической формулой Эйлера

$$u = F(\alpha(\gamma), \beta(\gamma); \gamma; \zeta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha(\gamma))\,\Gamma(\beta(\gamma))} \int_0^1 \frac{t^{\beta(\gamma)-1}\,(1-t)^{\alpha(\gamma)-1}\,d\,t}{(1-t\zeta)^{\alpha(\gamma)}}$$

для $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ и совпадающая с гипергеометрическим рядом в единичном круге. Пользуясь свойствами гамма функции и тождеством $(n+\alpha(\gamma))(n+\beta(\gamma)) = n^2 + \gamma n + \gamma/2$, получаем, что соответствующий гипергеометрический ряд имеет вид

$$F(\alpha(\gamma), \beta(\gamma); \gamma; \zeta) = 1 + \frac{\zeta}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta^n}{2} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j^2 + \gamma j + \gamma/2}{j^2 + (\gamma+1)j + \gamma}, \quad |\zeta| < 1.$$

Если $\gamma = 1$, то $\alpha = (1+i)/2$, $\beta = (1-i)/2$ и справедлива формула

$$F\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}; 1; \zeta\right) = \frac{2\,\mathrm{ch}\,(\pi/2)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos x\,d\,x}{\left(\mathrm{ch}^2\,x - \zeta\right)^{1/2}},\ \zeta \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty),$$

доказанная в [7]. Это представление не содержит комплексных параметров и используется при вычислении M^*. Уравнение

$$X(q) := \frac{F'\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}; 1; -\frac{1-q}{q}\right)}{qF\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}; 1; -\frac{1-q}{q}\right)} - \frac{F'\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}; 1; \frac{1-q}{2-q}\right)}{(2-q)F\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}; 1; \frac{1-q}{2-q}\right)} = \frac{1}{1-q}$$

имеет по крайней мере один корень в интервале $(0, 1)$. Через q^* обозначим наименьший из этих корней, обладающий свойством: $X(q) \le 1/(1-q)$ для любого $q \in [q^*, 1)$. Вычисления дают, что

$$q^* \approx 0{,}053186, \quad M^* = (2\pi)^{-1} \ln(2/q^* - 1) \approx 0{,}57298.$$

Теорема 4.13 *Пусть A – кольцо с конформным модулем $M(A)$. Если $M(A) \le M^* \approx 0{,}57298$, то постоянная $c_2(2, A) = 1/4$.*

Для указанных выше параметров α, β и γ гипергеометрическая функция, определенная формулой Эйлера, фактически зависит лишь от одного параметра $\gamma \in (1,2)$. Обозначим

$$u(\gamma;\zeta) = F(\alpha(\gamma),\beta(\gamma);\gamma;\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{C}\setminus[1,\infty).$$

Имеем: $u(\gamma;0) = 1$ и $u(\gamma;\xi) \in \mathbb{R}$ для любого $\xi \in (-\infty,1)$. Для любого фиксированного числа $\gamma \in (1,2)$ уравнение

$$Y(q,\gamma) := \frac{u'\left(\gamma;-1/q+1\right)}{qu\left(\gamma;-1/q+1\right)} - \frac{u'\left(\gamma;(1-q)/(2-q)\right)}{(2-q)u\left(\gamma;(1-q)/(2-q)\right)} = \frac{\gamma}{1-q}$$

имеет по крайней мере один корень $q \in (0,1)$.

Через $q(\gamma)$ обозначим наименьший из этих корней, обладающий свойством: $Y(q,\gamma) \le \gamma/(1-q)$ для любого $q \in [q(\gamma),1)$. Мы доказываем, что $q(\gamma) \in (0,q^*)$ и что для любого $M \in (M^*,\infty)$ уравнение

$$q(\gamma) = 1 - \operatorname{th}(\pi M)$$

имеет единственный корень $\gamma = \gamma(M) \in (1,2)$.

Теорема 4.14 *Предположим, что A – кольцо с конформным модулем $M(A) = M$. Если $M^* < M < \infty$, то*

1) $c_2(2,A) = \gamma(2-\gamma)/4$, где $\gamma = \gamma(M)$ – число, определенное выше;

2) функция $\gamma : (M^*,\infty) \to (1,2)$ является непрерывной и строго возрастающей, имеют место оценки

$$\frac{1}{16\left(M^2+1\right)} \le c_2(2,A) \le \frac{(1-q)^2}{4\,M^2},$$

где $q = 1 - \operatorname{th}(\pi M)$.

Опишем применение к неравенству (4.31).

Теорема 4.15 *Пусть A – кольцо с модулем $M(A) = M$.*

Если $M \in (0,M^*]$, то $C_2^*(A) = 1/16$.

Если $M \in (M^*, \infty)$, *то*

$$\frac{1}{256(M^2+1)^2} \le \frac{\gamma^2(2-\gamma)^2}{16} \le C_2^*(A) \le \min\left\{\frac{1}{16}, \frac{\operatorname{th}^4(\pi M)}{8M^4}\right\},$$

где $\gamma = \gamma(M) \in (1,2)$ – *число, определенное выше.*

Читатель найдет подробные доказательства теорем 4.13 – 4.15 в статье автора [54].

4.5 Неравенства в плоских областях, лямбда-близких к выпуклым

Потребуются некоторые обозначения, введенные в предыдущем пункте. А именно, снова обращаемся к обобщенным полигармоническим операторам, определенным формулами

$$\Delta^{m/2}u := \begin{cases} \Delta^j u, & \text{если } m = 2j \text{ – четное число;} \\ \nabla\Delta^j u, & \text{если } m = 2j+1 \ge 3 \text{ – нечетное число;} \\ \nabla u, & \text{если } m = 1. \end{cases}$$

Как и в предыдущем пункте, для вещественнозначных функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим неравенство

$$\iint_\Omega |\Delta^{m/2}u|^2 dx\, dy \ge C_2^{(m)}(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^2}{(\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^{2m}} dx\, dy,$$

где постоянная $C_2^{(m)}(\Omega) \in [0, \infty)$ выбрана наибольшей из возможных. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, $\Omega \ne \mathbb{C}$. Согласно обобщенной гипотезе Дэвиса, приведенной в предыдущем пункте, для любой области $C_2^{(m)}(\Omega) \in [0, C_2^{(m)}(\max)]$, где $C_2^{(m)}(\max) = ((2m-1)!!)^2/4^m$.

Точные значения $C_2^{(m)}(\Omega)$ известны в нескольких случаях. Например, $C_2^{(m)}(\Omega) = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial\Omega$ не является равномерно совершенным множеством (см. статьи [50] и [81] для $m = 1$, статью [53] для $m = 2$, и статью [11] в общем случае), поскольку справедливо следующее обобщение теоремы 4.9.

Теорема 4.16 (см. [11]). *Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Постоянная $C_2^{(m)}(\Omega) > 0$ тогда и только тогда, когда $\partial\Omega$ – равномерно совершенное множество в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Следуя снова статье [11], в этом пункте мы представим геометрическое описание одного семейства областей, близких в определенном смысле к выпуклым, для которых $C_2^{(m)}(\Omega) = C_2^{(m)}(\max)$. Необходимо следующее определение.

Определение 4.3 *Пусть $\lambda \in (0, \infty)$. Область $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, будем называть λ-близкой к выпуклой, если для любой точки $\zeta \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ существует точка z_ζ такая, что $|\zeta - z_\zeta| = \lambda$ и $D_\zeta = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_\zeta| < \lambda\} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$.*

Очевидно, *является λ-близким к выпуклой непустое пересечение двух областей, λ-близких к выпуклым.* Выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, является λ-близкой к выпуклой для любого $\lambda \in (0, \infty)$. Существуют конечносвязные и даже счетносвязные области, λ-близкие к выпуклым. Например, λ-близкими к выпуклым для фиксированного радиуса $\lambda \in (0, \infty)$, являются кольцо $\{\lambda < |z| < r_2\}$ и область $\{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < 2\lambda\} \setminus \overline{\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{D}(n, \lambda)}$, где $\mathbb{D}(n, \lambda) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3\,n\,\lambda| < \lambda\}$. Эти и другие примеры показывают, что области, λ-близкие к выпуклым, могут быть очень "далекими" от выпуклых областей с точки зрения наглядной геометрии.

Напомним определение внутреннего радиуса $\delta_0(\Omega)$ области: $\delta_0(\Omega) = \sup_{z\in\Omega} \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$.

Нам потребуются также специальные константы, зависящие лишь от некоторых числовых параметров. Пусть $s \in [3/2, \infty)$.

Обозначим $p_s = \sqrt{2s-3}$ и рассмотрим уравнение

$$(s-1)\int_0^\infty \frac{\cos(p_s\,x)}{\left(\operatorname{ch}^2 x+\xi\right)^{1/2}}dx = \xi\int_0^\infty \frac{\cos(p_s\,x)}{\left(\operatorname{ch}^2 x+\xi\right)^{3/2}}dx \qquad (4.64)$$

относительно $\xi \in (-1,\infty)$. Через $\xi = \Lambda_2(s)$ обозначим первый положительный корень этого уравнения. Нам потребуется число

$$\Lambda_0(m) = \min_{n\in\mathbb{N},\,1\le n\le m} \Lambda_2(2n).$$

Известно, что $\Lambda_2(2) \approx 2,49$ [7]. Вычисления показывают, что величина $\Lambda_2(s)$ убывает с ростом параметра s. Имеем, например, $\Lambda_2(3/2) \approx 4,7509$, $\Lambda_2(4) \approx 0,8903$, $\Lambda_2(50) \approx 0,0602$.

Мы доказываем существование первого положительного корня $\Lambda_2(s)$ уравнения (4.64) при фиксированном $s \in [3/2,\infty)$, а также справедливость неравенства $1/\Lambda_0(m) \le m+1/2$ для любого $m\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$.

Теорема 4.17 (см. [11]). *Пусть $m\in\mathbb{N}$, и пусть $\Omega\subset\mathbb{C}$ – область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$. Если область Ω является λ-близкой к выпуклой с радиусом λ, удовлетворяющим неравенству $\lambda \ge \delta_0(\Omega)/\Lambda_0(m)$, то $C_2^{(m)}(\Omega) = \left((2m-1)!!\right)^2/4^m$.*

При доказательстве нам потребуются две леммы.

Лемма 4.3 (см. [11]). *Для любых $s\in[3/2,\infty)$, $\rho\in(1,\,1+\Lambda_2(s)]$ и любой абсолютно непрерывной функции $f:[1,\rho]\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$f(1)=0, \quad f\not\equiv 0, \quad \int_1^\rho f'^2(r)\,(r-1)^{2-s}\,dr<\infty,$$

имеет место неравенство

$$\int_1^\rho \frac{f'^2(r)}{(r-1)^{s-2}}\,r\,dr > \frac{(s-1)^2}{4}\int_1^\rho \frac{f^2(r)}{(r-1)^s}\,r\,dr. \qquad (4.65)$$

Доказательство леммы 4.3. Пусть параметр $s \in [3/2, \infty)$, тогда $\sigma := (s-1)/2 \geq 1$. Рассмотрим гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$\zeta(1-\zeta)u'' - (1-2\zeta)\,u' + \sigma u = 0, \tag{4.66}$$

соответствующее параметрам

$$\gamma_0 = 1, \quad \alpha_0 = (1+ip_s)\,/2, \ \ \beta_0 = (1-ip_s)\,/2$$

с учетом равенств $\alpha_0 + \beta_0 = 1$, $\alpha_0\beta_0 = \sigma$.

Пусть $u_0(\zeta) = F(\alpha_0, \beta_0; 1; \zeta)$ – решение уравнения (4.66), голоморфное в области $\mathbb{C}\setminus[1, +\infty)$. Из представления гипергеометрической функции Гаусса $F(\alpha, \beta; 1; \zeta)$ в единичном круге

$$F(\alpha, \beta; 1; \zeta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{(k!)^2} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha + j)(\beta + j),$$

получаем

$$w_\sigma(\zeta) = F(\alpha_0, \beta_0; 1; \zeta) = 1 + \sigma\zeta + \sigma \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta^k}{(k!)^2} \prod_{j=1}^{k-1} (j^2 + j + \sigma), \quad |\zeta| < 1.$$

Поскольку σ - вещественное число, то для всех точек единичного круга имеет место равенство $w_\sigma(\zeta) = \overline{w_\sigma(\overline{\zeta})}$. Тогда $w_\sigma(\zeta) = \overline{w_\sigma(\overline{\zeta})}$ для всех точек области $\mathbb{C}\setminus[1, +\infty)$ по теореме единственности для аналитических функций. Следовательно, $w_\sigma(t) \in \mathbb{R}$ для любой точки $t \in (-\infty, 1)$.

Определим функцию $q : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ равенством

$$q(1+\xi) = \xi^\sigma w_\sigma(-\xi) \equiv \xi^\sigma F(\alpha_0, \beta_0; 1; -\xi),$$

где $\xi \geq 0$.

Пользуясь уравнением Гаусса (4.66), для $q(r)$ непосредственными вычислениями получаем уравнение

$$\left(\frac{rq'(r)}{(r-1)^{s-2}}\right)' + \frac{(s-1)^2 r\, q(r)}{4\,(r-1)^s)} = 0, \quad 1 < r < \infty. \tag{4.67}$$

При $r \to 1$ имеем

$$q(r) = (r-1)^{\sigma}\,(1 + O(r-1))\,,\;\; q'(r) = \sigma\,(r-1)^{\sigma-1}\,(1 + O(r-1))\,.$$

Следовательно, существует такое $\rho > 1$, что $q(r)$, $q'(r)$ положительны в промежутке $(1, \rho]$. Кроме того, для любого $\rho > 1$ и любой абсолютно непрерывной функции $f : [1, \rho\,] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям

$$f(1) = 0, \quad \int_1^{\rho} f'^2(r)\,(r-1)^{2-s}\,dr < \infty,$$

при $r \in (1, \rho]$ имеем

$$|f(r)|^2 = \left(\int_1^r f'(t)\,dt\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{(r-1)^{s-1}}{s-1} \int_1^r \frac{f'^2(t)}{(t-1)^{s-2}}\,dt = o(q^2(r)),\; r \to 1,$$

и

$$\int_1^{\rho} q'^2(r)\,(r-1)^{2-s}\,dr = \int_1^{\rho} \frac{q'^2(r)}{(r-1)^{2\sigma-1}}\,dr = \infty.$$

Возьмем произвольное число $\rho > 1$, удовлетворяющее требованию: $q(r) > 0$ для любого $r \in (1, \rho]$. Полагая $a = 1$, $b = \rho$, $p\,(r) = r/(r-1)^{s-2}$, следуя доказательству леммы 2 из [8] и учитывая уравнение (4.67), для любой абсолютно непрерывной функции $f : [1, \rho\,] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям

$$f(1) = 0, \quad f \not\equiv 0, \quad \int_1^{\rho} f'^2(r)\,(r-1)^{2-s}\,dr < \infty,$$

получаем неравенство

$$\int_1^\rho \frac{f'^2(r)}{(r-1)^{s-2}}\, r\, dr >$$

$$> \frac{\rho f^2(\rho) q'(\rho)}{(\rho-1)^{s-2} q(\rho)} + \frac{(s-1)^2}{4} \int_1^\rho \frac{f^2(r)}{(r-1)^s}\, r\, dr. \qquad (4.68)$$

Покажем, что уравнение $q'(\rho) = 0$ имеет хотя бы один корень при $\rho \in (1, \infty)$. Если это неверно, то $q'(r) > 0$ и $q(r) > 0$ для всех $r \in (1, \infty)$. Следовательно, неравенство (4.68) должно иметь место для любого $\rho \in (1, \infty)$. Но можно показать, что существуют допустимые функции, для которых неравенство (4.68) не будет справедливым для достаточно больших $\rho \in (1, \infty)$. Пусть $3/2 \le s \le 2$. Рассмотрим допустимую функцию f_0, определенную формулами: $f_0(r) = (r-1)^{s/2}$ при $r \in [1, 2]$, $f_0(r) \equiv 1$ при $r \in (2, \infty)$. Для f_0 неравенство (4.68) не будет справедливым для достаточно больших $\rho \in (1, \infty)$. Действительно, при $\rho \to \infty$ будем иметь

$$\int_1^\rho \frac{f_0'^2(r)\, r\, dr}{(r-1)^{s-2}} = \int_1^2 \frac{f_0'^2(r)\, r\, dr}{(r-1)^{s-2}} < \infty,$$

$$\int_1^\rho \frac{f_0^2(r)\, r\, dr}{(r-1)^s} > \int_2^\rho \frac{r dr}{(r-1)^s} \to \infty.$$

Пусть теперь $2 < s < \infty$, $\varepsilon > 0$. Возьмем допустимую функцию f_1, определенную формулами: $f_1(r) = (r-1)^{(s-1+\varepsilon/2}$ при $r \in [1, 2]$, $f_1(r) \equiv 1$ при $r \in (2, \infty)$. Применяя к f_1 неравенство (4.68) при $s > 2$, $\rho > 2$, получаем

$$\frac{2(s-1)\varepsilon + \varepsilon^2}{4} \int_1^2 \frac{r\, dr}{(r-1)^{1-\varepsilon}} > \frac{(s-1)^2}{4} \int_2^\rho \frac{r\, dr}{(r-1)^s}.$$

При $\rho \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ приходим к неравенству

$$\frac{s-1}{2} \geq \frac{(s-1)^2}{4} \left(\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} \right),$$

которое неверно для любого $s > 2$.

Из неравенства (4.68) следует, что доказываемое неравенство (4.65) будет справедливо для любого $\rho \in (1, \rho_2(s)]$, где $\rho_2(s)$ – наименьший (возможно, единственный) из корней уравнения

$$q'(\rho) = 0, \quad \rho \in (1, \infty).$$

Остается лишь доказать, что $\rho_2(s) = 1 + \Lambda_2(s)$, где число $\Lambda_2(s)$ определено как первый положительный корень уравнения (4.64). Имеем

$$\sqrt{\xi^{s-1}} q'(1+\xi) = \frac{s-1}{2\sqrt{\xi}} F(\alpha_0, \beta_0; 1; -\xi) + \sqrt{\xi} \frac{F(\alpha_0, \beta_0; 1; -\xi)}{d\xi},$$

поэтому $\rho_2(s) - 1$ совпадает с первым положительным корнем уравнения

$$(s-1)F(\alpha_0, \beta_0; 1; -\xi) - 2\xi F'(\alpha_0, \beta_0; 1; \zeta)\,|_{\zeta=-\xi} = 0, \quad \xi \in (-1, +\infty).$$

Но это уравнение равносильно (4.64), так как для гипергеометрической функции Гаусса $F(\alpha_0, \beta_0; 1; \zeta)$ справедливо представление

$$F(\alpha_0, \beta_0; 1; \zeta) = \frac{2\,\mathrm{ch}\,(\pi p_s/2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\,(p_s\, x)}{\left(\mathrm{ch}^2\, x - \zeta\right)^{1/2}}\, d\, x, \qquad (4.69)$$

где $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, $p_s = \sqrt{2s-3}$. Эта формула доказана нами ранее для случая $s = 2$ (см. лемму 1, формулу (7) в [7]). Формула (4.69) получается полным повторением приведенного в [7] доказательства формулы (7) с заменой чисел $(1+i)/2$ и $(1-i)/2$ на числа $(1+ip_s)/2$ и $(1-ip_s)/2$. Итак, лемма 3.3 доказана.

Докажем дополнительно оценку $1/\Lambda_0(m) \le m+1/2$, где $m \in \mathbb{N}$ и $m \ge 2$). Понятно, что достаточно обосновать неравенство $\Lambda_2(s) \ge 2/(s+1) = 1/(\sigma+1)$, т. е. утверждение: $q'(1+\xi) > 0$ при любом $\xi \in (0, 1/(\sigma+1))$. Для случая $\xi \in (0,1)$ имеем

$$\frac{q'(1+\xi)}{\sigma\,\xi^{\sigma-1}} = 1 - (\sigma+1)\,\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\xi)\,\xi^{2n}}{((2n)!)^2} \prod_{j=1}^{2n-1} (j^2 + j + \sigma),$$

где

$$a_n(\xi) = 2n + \sigma - \xi\,\frac{(2n+1+\sigma)\,(4n^2+2n+\sigma)}{(2n+1)^2}.$$

Вычисления показывают, что $a_n(\xi) > 0$ для любых $\sigma > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\xi \le 1/(\sigma+1)$. Следовательно, $q'(1+\xi) > 0$ при любом

$$\xi \in (0, 1/(\sigma+1)).$$

Лемма 4.4 (см. [11]). *Предположим, что $s \in [3/2, \infty)$ и $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$. Если область Ω является λ-близкой к выпуклой с радиусом λ, удовлетворяющим неравенству $\lambda \ge \delta_0(\Omega)/\Lambda_2(s)$, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^2 dx\,dy}{(\mathrm{dist}(z,\partial\Omega))^{s-2}} \ge \frac{(s-1)^2}{4} \iint_\Omega \frac{|u|^2 dx\,dy}{(\mathrm{dist}(z,\partial\Omega))^{s}}. \qquad (4.70)$$

Доказательства леммы 4.4. Неравенство достаточно доказать для фиксированной вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Без ограничения общности можно считать, что Ω – ограниченная область. Действительно, если Ω – неограниченная область, то мы можем взять в качестве области пересечение Ω с достаточно большим кругом, содержащим внутри себя компактный носитель $E \subset \Omega$ функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Итак, пусть Ω_0 – ограниченная область, λ_0-близкая к выпуклой с радиусом $\lambda_0 \geq \delta_0(\Omega_0)/\Lambda_0(m)$. Определим число

$$\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(E_0, \partial\Omega_0) > 0$$

– расстояние от носителя E_0 заданной вещественнозначной функции $u_0 \in C_0^\infty(\Omega_0)$ до границы области Ω_0. Докажем, что неравенство (4.70) справедливо в области $\Omega = \Omega_0$ для функции $u = u_0$.

По определению λ_0-близости к выпуклой области для каждой граничной точки $\zeta \in \partial\Omega_0$ существуют точка $z_\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_0}$ и круг $\mathbb{D}_\zeta = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_\zeta| < \lambda_0\}$, удовлетворяющие условиям: $|\zeta - z_\zeta| = \lambda_0$ и $\mathbb{D}_\zeta \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_0}$. Положим $\varepsilon_0' = \min\{1/2,\ \varepsilon_0/(2\lambda_0)\}$. Для каждого $\zeta \in \partial\Omega_0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$ определим точку $z_\zeta(\varepsilon) = z_\zeta - \varepsilon(z_\zeta - \zeta)$ и новый круг $\mathbb{D}_\zeta(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_\zeta(\varepsilon)| < \lambda_0\}$, полученный сдвигом круга $\mathbb{D}_\zeta$ в сторону области Ω_0 на расстояние $\lambda_0\,\varepsilon \leq \varepsilon_0/2$. Очевидно, $E_0 \cap \mathbb{D}_\zeta(\varepsilon) = \emptyset$ и $|\zeta - z_\zeta(\varepsilon)| = (1 - \varepsilon)\lambda_0 < \lambda_0$, следовательно, $\zeta \in D_\zeta(\varepsilon)$. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$ множество кругов $\mathbb{D}_\zeta(\varepsilon)$, $\zeta \in \partial\Omega_0$, образует открытое покрытие компактного множества $\partial\Omega_0$. По лемме Гейне-Бореля существует конечное подпокрытие. Пусть это подпокрытие состоит из следующих кругов

$$\mathbb{D}^j(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_j| < \lambda_0\}, \quad j = 1,\, 2,\, ...,\, k.$$

Без ограничения общности будем считать, что эти круги различны. Определим область $\Omega(\varepsilon) = \Omega_0 \setminus \cup_{j=1}^k \overline{D^j(\varepsilon)}$. Для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$ имеем:

$$E_0 = \operatorname{supp} u \subset \Omega(\varepsilon), \quad \overline{\Omega(\varepsilon)} \subset \Omega_0, \quad \delta_0(\Omega(\varepsilon)) < \delta_0(\Omega_0)$$

и, кроме того,

$$\operatorname{dist}(z, \partial\Omega_0) - \lambda_0\varepsilon \leq \operatorname{dist}(z, \partial\Omega(\varepsilon)) \leq \operatorname{dist}(z, \partial\Omega_0), \forall z \in E_0. \quad (4.71)$$

Граница области $\Omega(\varepsilon)$ состоит из конечного числа дуг окружностей радиуса λ_0. Пусть $L(\lambda_0)$ – одна из таких дуг, заданная уравнением $w = a + \lambda_0 e^{i\theta}$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, $0 < \theta_2 - \theta_1 \le 2\pi$. Рассмотрим множество точек притяжения этой дуги, определяемое формулой

$$S(L(\lambda_0)) = \{z \in \Omega(\varepsilon) : \mathrm{dist}(z, L(\lambda_0)) = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega(\varepsilon))\}.$$

Поскольку для любой точки $z \in \Omega(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|z - a| > \lambda_0$, то $S(L(\lambda_0))$ представляет собой множество вида

$$S(L(\lambda_0)) = \{z = a + te^{i\theta} : \theta_1 \le \theta \le \theta_2, r_0 < t \le \lambda_0 + \varphi_L(\theta)\},$$

где функция φ_L удовлетворяет неравенствам:

$$0 \le \varphi_L(\theta) < \delta_0(\Omega_0) \le \lambda_0(1 + \Lambda_2(s))$$

при любом $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Применяя к $u_0(a + te^{i\theta}) \equiv f(t/\lambda_0)$ неравенство (4.65) леммы 4.3, учитывая неравенство $|\nabla u_0| \ge |\partial u_0/\partial t|$, при любом фиксированном $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ получаем

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varphi_L(\theta)} \frac{\left|\nabla u_0\left(a + te^{i\theta}\right)\right|^2}{(t - r_0)^{s-2}}\, t\, dt \ge \frac{(s-1)^2}{4} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varphi_L(\theta)} \frac{u_0^2\left(a + te^{i\theta}\right)}{(t - \lambda_0)^s}\, t\, dt.$$

Интегрируя это неравенство по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, будем иметь

$$\iint_{S(L(\lambda_0))} \frac{|\nabla u_0|^2 dx\, dy}{(\mathrm{dist}(z, \partial\Omega(\varepsilon)))^{s-2}} \ge \frac{(s-1)^2}{4} \iint_{S(L(\lambda_0))} \frac{|u_0|^2 dx\, dy}{(\mathrm{dist}(z, \partial\Omega(\varepsilon)))^s}.$$

Суммируя такие неравенства по всем дугам $L(\lambda_0)$, составляющим в совокупности границу области $\Omega(\varepsilon)$, приходим к неравенству

$$\iint_{\Omega(\varepsilon)} \frac{|\nabla u_0|^2 dx\, dy}{(\mathrm{dist}(z, \partial\Omega(\varepsilon)))^{s-2}} \ge \frac{(s-1)^2}{4} \iint_{\Omega(\varepsilon)} \frac{|u_0|^2 dx\, dy}{(\mathrm{dist}(z, \partial\Omega(\varepsilon)))^s}.$$

Подынтегральные функции в этом неравенстве равны нулю на множестве Ω_0/E_0, а $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega(\varepsilon))$ равномерно в E_0 сходится к $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega_0)$ при $\varepsilon \to 0$ в силу неравенств (4.71). Следовательно, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем доказываемое неравенство (4.70) для функции $u = u_0$, что и требовалось.

Доказательство теоремы 4.17. Предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, является λ-близкой к выпуклой для некоторого радиуса $\lambda \in (0, \infty)$. Нетрудно показать, что такая область имеет граничные точки, двусторонне достижимые кругами. Действительно, пусть $z_1 \in \Omega$ – такая точка, что

$$r_1 := \operatorname{dist}(z_1, \partial\Omega) < r.$$

Тогда существует точка $\zeta \in \partial\Omega$ такая, что $|\zeta - z_1| = r_1$ и

$$\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < r_1\} \subset \Omega.$$

С другой стороны, из определения областей, λ-близких к выпуклым, с учетом неравенства $r_1 < r$ легко следует существование круга $\mathbb{D}^- = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_\zeta| < r_1\} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}^-$.

Точка $\zeta \in \partial\Omega$, двусторонне достижимая кругами, является S-регулярной. Поэтому $C_2^{(m)}(\Omega) \leq ((2m-1)!!)^2/4^m$ для любой области, λ-близкой к выпуклой для некоторого радиуса $\lambda \in (0, \infty)$.

Оценка константы $C_2^{(m)}(\Omega)$ снизу. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, λ-близкая к выпуклой с ограничением $\lambda \geq \Lambda_0(m)\,\delta_0(\Omega)$, f – вещественнозначная функция, $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Очевидно, нам нужно доказать неравенство: $I_m(f) :=$

$$= \iint_\Omega \left|\Delta^{m/2} f\right|^2 dx\,dy \geq \frac{((2m-1)!!)^2}{4^m} \iint_\Omega \frac{|f|^2 dx\,dy}{(\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^{2m}}. \quad (4.72)$$

Применяя лемму 4.4 при $s = 2n$, $1 \leq n \leq m$, получаем: *для любой* *вещественнозначной функции* $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^2 dx\, dy}{(\mathrm{dist}(z, \partial\Omega))^{2n-2}} \geq \frac{(2n-1)^2}{4} \iint_\Omega \frac{|u|^2 dx\, dy}{(\mathrm{dist}(z, \partial\Omega))^{2n}}. \qquad (4.73)$$

Если $m = 1$, то неравенство (4.72) совпадает с (4.73) для $n = 1$ и $u = f$. Если же $m \geq 2$, то пользуемся схемой применения неравенства (4.73) при $n = 1$. Получаем

$$I_m(f) \geq \frac{1}{4} \iint_\Omega \sum_{k=0}^{m-2} C_{m-2}^k \left|\nabla \left(\frac{\partial^{m-2} f}{\partial x^k \partial y^{m-2-k}}\right)\right|^2 \frac{dx\, dy}{(\mathrm{dist}(z, \partial\Omega))^2}.$$

Для спуска к производным меньшего порядка применяем неравенство (4.73) при $n = 2$ к функциям

$$u = u_k = \frac{\partial^{m-2} f}{\partial x^k \partial y^{m-2-k}}$$

и суммируем по k. Если $m = 2$, то немедленно приходим к доказываемому неравенству (4.72). Если же $m \geq 3$, то продолжаем процесс спуска к производным меньшего порядка, пользуясь неравенством (4.73) при $n = 3, ..., m$. В результате снова приходим к неравенству (4.72). Этим и завершается доказательство теоремы 4.17.

Другие результаты автора по неравенствам типа Харди и Реллиха в областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, λ-близких к выпуклым, можно найти в статьях [7], [12] и [53].

Глава 5

Применения к задачам математической физики

Одномерные и многомерные неравенства Харди часто используются как удобный инструмент при различных оценках (см., например, монографии В. Г. Мазьи [31], С. Л. Соболева [41], Д. В. Прохорова, В. Д. Степанова и Е. П. Ушаковой [37]). Хорошо известны связи неравенств Харди и Реллиха со спектральной теорией и с краевыми задачами для вырождающихся уравнений эллиптического типа. В монографии А. А. Балинского, У. Д. Эванса и Р. Т. Льюиса [66] описана связь неравенств типа Харди с теоретической физикой, в частности, с принципом неопределенности Гейзенберга. Некоторые неравенства типа Харди применялись также при решении задач информатики по обработке и восстановлению изображений. Продолжая этот ряд, мы опишем ниже несколько результатов, связанных с применениями метрики Пуанкаре, конформно инвариантных неравенств и преобразований Мёбиуса.

5.1 Вокруг жесткости кручения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область, не совпадающая со всей плоскостью. Рассмотрим известную величину

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \left(2 \iint_\Omega |u(x,y)|\, dxdy\right)^2 \Big/ \iint_\Omega |\nabla u(x,y)|^2 dx \ , \quad (5.1)$$

где $C_0^\infty(\Omega)$ – семейство гладких функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в Ω.

Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область с кусочно-гладкой границей, то величина $P(\Omega)$ совпадает с жесткостью кручения упругой балки с поперечным сечением Ω, которая определена Сен-Венаном формулой $P(\Omega) = 2 \iint_\Omega v(x,y)dxdy$, где $v = v(x,y)$ является классическим решением краевой задачи

$$\Delta v(x,y) = -2, \quad (x,y) \in \Omega,$$

и

$$v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega.$$

В общем случае, как для односвязных, так и для неодносвязных областей, величина $P(\Omega)$ из (5.1) используется в гидродинамике. А именно, согласно модели Буссинеске, $P(\Omega)$ характеризует расход течения вязкой жидкости в канале с поперечным сечением Ω (см., например, статью автора и А. Р. Касимова [56]).

Известен ряд результатов по изопериметрическим неравенствам для жесткости кручения $P(\Omega)$ (см., например, монографии С. Р. Тимошенко [118], Г. Полиа и Г. Сегё [36], ставшие уже классическими, а также монографию Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [20]). Надо отметить, что сейчас принято говорить Пойа вместо Полиа.

Приведенные в этих книгах формулы Кулона, Коши и Сен-

Венана позволяют найти приближенные значения жесткости кручения для ряда областей, а также для нескольких весьма узких, но практически важных, подклассов односвязных областей на плоскости. На развитие тематики большое влияние оказала гипотеза Сен-Венана. В 1924 году Е. Николаи доказал, что для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ имеет место изопериметрическое неравенство

$$P(\Omega) \leq I_2(\Omega), \tag{5.2}$$

где $I_2(\Omega) = \iint_\Omega ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)\, dxdy$ – момент инерции области Ω относительно ее центра масс (x_0, y_0). Неравенство (5.2) дополнило приближенную формулу Кулона $P(\Omega) \approx I_2(\Omega)$, которая является точной для круга. В 1948 году Пойа доказал справедливость классической гипотезы Сен-Венана [111]

$$P(\Omega) \leq \frac{S^2(\Omega)}{2\pi}, \tag{5.3}$$

где $S(\Omega)$ – площадь односвязной области Ω. Как и в (5.2), равенство в (5.3) имеет место лишь для круга. Отметим, что неравенства (5.2) и (5.3) являются лишь односторонними, так как $\inf_\Omega P(\Omega)/I_2(\Omega) = \inf_\Omega P(\Omega)/S^2(\Omega) = 0$. Ряд других современных результатов по оценкам жесткости кручения можно найти в монографии К. Бэндл [67] и в статьях М. Бануэлоса, Ван Ден М. Берга и Т. Кэрола [69], А. Карбери, В. Мазьи, М. Митреа и Д. Руле [75].

В статье [4] автором был определен конформный момент инерции области

$$I_c(\Omega) = \iint_\Omega R^2(z, \Omega) dxdy, \quad z = x + iy,$$

где $R(z, \Omega) = 1/\lambda_\Omega(z)$, $\lambda_\Omega(z)$– коэффициент метрики Пуанкаре с гауссовой кривизной $\kappa = -4$. Следующая теорема была доказана автором в [4] для случая, когда Ω – односвязная область, и в статье [8] для случая, когда Ω – двусвязная область.

Теорема 5.1 *Предположим, что* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *– односвязная или двусвязная область гиперболического типа. Тогда справедливы неравенства* $I_c(\Omega) \leq P(\Omega) \leq 4\, I_c(\Omega)$*. Нижняя оценка* $I_c(\Omega) \leq P(\Omega)$ *верна для любой области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *гиперболического типа.*

Доказательство теоремы 5.1. Возьмем произвольную вещественнозначную функцию $u \in C_0^\infty(\Omega)$. В односвязной или двусвязной области гиперболического типа справедливо неравенство (см. выше теорему 3.1)

$$\iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 \, dx\, dy \geq \iint_\Omega \frac{|u(z)|^2}{R^2(z,\Omega)} \, dx\, dy.$$

С другой стороны, простые преобразования и применение неравенства Коши-Буняковского-Шварца дают, что

$$\left(2 \iint_\Omega |u(x,y)|\, dxdy\right)^2 = \left(2 \iint_\Omega \frac{|u(x,y)|}{R(z,\Omega)} R(z,\Omega)\, dxdy\right)^2 \leq$$

$$\leq 4 \iint_\Omega R^2(z,\Omega) dxdy \iint_\Omega |\nabla u(z)|^2 \, dx\, dy$$

Следовательно, для односвязных и двусвязных областей гиперболического типа

$$P(\Omega) \leq 4 \iint_\Omega R^2(z,\Omega) dxdy = 4\, I_c(\Omega)$$

с учетом определения (5.1).

Чтобы получить нижнюю оценку $I_c(\Omega) \leq P(\Omega)$ для произвольной области гиперболического типа заметим, что для любой вещественнозначной функции $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$

$$P(\Omega) \geq \frac{\left(2 \iint_\Omega |u_0(x,y)|\, dxdy\right)^2}{\iint_\Omega |\nabla u_0(x,y)|^2 dxdy}.$$

Стандартные рассуждения, связанные с аппроксимацией области и функций семейства $C_0^\infty(\Omega)$ с конечным интегралом Дирихле, показывают, что в этой формуле можно взять $u_0(x,y) = R^2(z,\Omega)$. Но тогда

$$P(\Omega) \geq \frac{\left(\iint_\Omega R^2(z,\Omega)\, dxdy\right)^2}{\iint_\Omega |\nabla R(z,\Omega)|^2 R^2(z,\Omega) dxdy} \geq \iint_\Omega R^2(z,\Omega)\, dxdy.$$

Последнее неравенство в этой цепочке неравенств справедливо в силу теоремы 2.9. Этим и завершается доказательство теоремы.

Пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$ – однолистное конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на односвязную область Ω. Нам потребуются разложение в ряд Тейлора

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^\infty a_n \zeta^n, \quad |\zeta| < 1,$$

и подобласть $\Omega_r = \{f(\zeta) : |\zeta| < r\} \subset \Omega$ для любого фиксированного $r \in (0,1)$.

В [36] приведена формула Г. Давенпорта (специалиста по теории чисел и диофантовым уравнениям), выражающая жесткость кручения односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ через тейлоровские коэффициенты a_n указанного выше однолистного конформного отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega$. В следующем утверждении дан аналог формулы Давенпорта, доказанный в статье [44] Д. А. Абрамова, автора и Д. Х. Гиниятовой.

Теорема 5.2 ([44]). *Для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, конформно эквивалентной кругу, имеет место формула*

$$P(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^\infty \sum_{\alpha=1}^{[n/2]} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta\, a_{n-\beta} \right|^2,$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Доказательство теоремы 5.2. Пусть $r \in (0,1)$. Предположим сначала, что $P(\Omega) < \infty$. Докажем, что при этих предположениях для жесткости кручения односвязных областей Ω_r и Ω справедливы две следующих формулы: первая формула

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} r^{2n} \sum_{\alpha=1}^{[n/2]} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta \, a_{n-\beta} \right|^2$$

и вторая формула

$$P(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{[n/2]} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta \, a_{n-\beta} \right|^2 .$$

Согласно формуле Г. Давенпорта (см. [36]) имеем

$$P(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{\delta=1}^{\infty}{}^{*} \; \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} a_\alpha a_\beta \overline{a_\gamma a_\delta},$$

где $\sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \sum_\delta{}^{*}$ означает сумму по положительным индексам, удовлетворяющим условию $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Для сходимости рядов достаточно ограниченности области. Это имеет место для Ω_r при любом $r \in (0,1)$. Поэтому для Ω_r имеем сходящиеся ряды

$$P(\Omega_r) = \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{\delta=1}^{\infty}{}^{*} \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} r^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} a_\alpha a_\beta \overline{a_\gamma a_\delta}.$$

Более того, поскольку ряд Тейлора $f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n$, $|\zeta| \le r$, сходится абсолютно и равномерно для любого фиксированного $r \in (0,1)$, то ряд для $P(\Omega_r)$ сходится абсолютно, и поэтому допустима перестановки членов ряда при любом $0 < r < 1$. Пусть

$n=\alpha+\beta=\gamma+\delta$, тогда можем записать ряд в следующей форме

$$P(\Omega_r)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}r^{2n}\sum_{\alpha=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{n-1}\min\{\alpha,n-\alpha,\beta,n-\beta\}a_\alpha a_{n-\alpha}\overline{a_\beta a_{n-\beta}}.$$

Теперь преобразуем внутренние двойные ряды следующим образом

$$A_n=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\min\{i,j,n-i,n-j\}a_i a_{n-i}\overline{a_j a_{n-j}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}a_i a_{n-i}\overline{a_j a_{n-j}}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=2}^{n-2}\min\{i-1,j-1,n-i-1,n-j-1\}a_i a_{n-i}\overline{a_j a_{n-j}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}a_i a_{n-i}\overline{a_j a_{n-j}}+$$

$$+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=2}^{n-2}a_i a_{n-i}\overline{a_j a_{n-j}}+$$

$$+\sum_{i=3}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-3}\min\{i-2,j-2,n-i-2,n-j-2\}a_i a_{n-i}\overline{a_j a_{n-j}}.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=m}^{n-m}\sum\limits_{j=m}^{n-m}a_i a_{n-i}\overline{a_j a_{n-j}}=\left|\sum\limits_{i=m}^{n-m}a_i a_{n-i}\right|^2$, то для $k=[n/2]$ получаем

$$A_n=\left|\sum_{i=1}^{n-1}a_i a_{n-i}\right|^2+\left|\sum_{i=2}^{n-2}a_i a_{n-i}\right|^2+\ ...\ +\left|\sum_{i=k-1}^{n-k+1}a_i a_{n-i}\right|^2+$$

$$+\sum_{i=k}^{n-k}\sum_{j=k}^{n-k}\min\{i-k+1,j-k+1,n-i-k+1,n-j-k+1\}a_i a_{n-i}\overline{a_j a_{n-j}}.$$

Последнюю сумму обозначим B_n и для $k = [n/2]$ рассмотрим два случая:

- $n = 2m$ – четное число, тогда $[n/2] = n/2$, $k = n - k$ и

$$B_n = \min\{1,1,1,1\} a_{n/2} a_{n/2} \overline{a_{n/2} a_{n/2}} = |a_{n/2} a_{n/2}|^2 =$$

$$= \left| \sum_{i=\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a_i a_{n-i} \right|^2 = \left| \sum_{i=k}^{n-k} a_i a_{n-i} \right|^2;$$

- $n = 2m+1$ – нечетное число, тогда $[n/2] = m$, $n - k = m + 1$ и

$$B_n = \sum_{i=m}^{m+1} \sum_{j=m}^{m+1} \sigma_{ijm} a_i a_{2m+1-i} \overline{a_j a_{2m+1-j}} =$$

$$= |2a_m a_{m+1}|^2 = \left| \sum_{i=m}^{m+1} a_i a_{2m-i+1} \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{i=k}^{n-k} a_i a_{n-i} \right|^2 (\sigma_{ijm} = \min\{i-m+1, j-m+1, m-i+2, m-j+2\}).$$

Таким образом, имеем

$$A_n = \sum_{\alpha=1}^{k} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta} \right|^2 = \sum_{\alpha=1}^{[n/2]} \left| \sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta} \right|^2,$$

что влечет первую доказываемую формулу.

Для доказательства второй формулы достаточно заметить, что $A_n \geq 0$ и $P(\Omega_r) \leq P(\Omega)$, поскольку $\Omega_r \subset \Omega$. Но тогда

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{N} A_n r^{2n} \leq P(\Omega_r) \leq P(\Omega)$$

для любого $r \in (0,1)$ и любого $N \in \mathbb{N}$. Поэтому ряд $\sum_{n=2}^{\infty} A_n$

сходится и $(\pi/2)\ \sum_{n=2}^{\infty} A_n \le P(\Omega)$. Если предположить

$$P(\Omega) - \frac{\pi}{2}\ \sum_{n=2}^{\infty} A_n = \varepsilon > 0,$$

то

$$P(\Omega) - P(\Omega_r) \ge P(\Omega) - \frac{\pi}{2}\ \sum_{n=2}^{\infty} A_n = \varepsilon > 0$$

для любого $r \in (0,1)$. Это противоречит уравнению

$$P(\Omega) = \lim_{r\to 1} P(\Omega_r),$$

доказанному в более общей ситуации (см. ниже лемму 5.2).

Из приведенного доказательства следует, что $P(\Omega) = +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n = \sum_{n=2}^{\infty}\ \sum_{\alpha=1}^{[n/2]}\ \left|\sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta}\right|^2 = +\infty.$$

Комбинируя это со второй формулой, получаем, что равенство

$$P(\Omega) = \frac{\pi}{2}\ \sum_{n=2}^{\infty}\ \sum_{\alpha=1}^{[n/2]}\ \left|\sum_{\beta=\alpha}^{n-\alpha} a_\beta a_{n-\beta}\right|^2$$

справедливо для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Теорема доказана.

Лемма 5.1 ([44]) *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Тогда*

$$I_c(\Omega) = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} \left|\sum_{\beta=1}^{[n/2]} (n-2\beta+1) \sum_{\alpha=\beta}^{n-\beta} a_\alpha a_{n-\alpha}\right|^2.$$

Действительно, переходя к полярным координатам, имеем

$$I_c(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(\zeta)|^4 (1-\rho^2)^2 \rho \, d\theta d\rho,$$

где $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Пользуясь разложениями

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad f'(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \zeta^{k-1},$$

получаем

$$|f'(\zeta)|^4 = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) a_k a_{n-k} \zeta^{n-2} \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) a_k a_{n-k} \rho^{n-2} e^{i\theta(n-2)} \right|^2 .$$

Интегрируя, приходим к формуле

$$I_c(\Omega) = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) a_k a_{n-k} \right|^2 \int_0^1 \rho^{2n-4} (1-\rho^2)^2 \, d\rho.$$

Непосредственные вычисления дают, что

$$\int_0^1 \rho^{2n-4} (1-\rho^2)^2 \, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-2} (1-t)^2 dt = \frac{1}{2} B(n-1, 3) =$$

$$= \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(3)}{2\Gamma(n+2)} = \frac{(n-2)!2!}{2(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)}.$$

Таким образом,

$$I_c(\Omega) = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} \left| \sum_{\alpha=1}^{n-1} \alpha(n-\alpha) a_\alpha a_{n-\alpha} \right|^2 .$$

Рассмотрим теперь сумму $A_n = \frac{1}{n(n^2-1)} \left| \sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} \alpha(n-\alpha) a_\alpha a_{n-\alpha} \right|^2$. Имеем: $c_\alpha = \alpha(n-\alpha)$. Минимум $c_\alpha = n\alpha - \alpha^2$ равен $n-1$. Пользуясь симметрией суммы и перегруппировкой коэффициентов с учетом соотношения $c_{\alpha+1} - c_\alpha = n - 2\alpha - 1 \quad (1 \leqslant \alpha < [n/2])$, получаем

$$A_n = \frac{1}{n(n^2-1)} \left| \sum_{\beta=1}^{[n/2]} (n - 2\beta + 1) \sum_{\alpha=\beta}^{n-\beta} a_\alpha a_{n-\alpha} \right|^2 .$$

Лемма доказана.

Из этой леммы и предыдущей теоремы получаем новое доказательство неравенства Р. Г. Салахудинова [112] с полным описанием экстремальных областей.

Следствие 5.2.1 (см. [112] и [44]). *Для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ с конечной жесткостью кручения имеет место точная оценка $(3/2) I_c(\Omega) \leqslant P(\Omega)$. Равенство будет иметь место тогда и только тогда, когда Ω является кругом.*

Действительно, имеем

$$I_c(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} A_n, \quad P(\Omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} B_n,$$

где

$$A_n = \frac{4}{n(n^2-1)} \left| \sum_{\beta=1}^{[n/2]} (n - 2\beta + 1) \sum_{\alpha=\beta}^{n-\beta} a_\alpha a_{n-\alpha} \right|^2 ,$$

$$B_n = \sum_{\beta=1}^{[n/2]} \left| \sum_{\alpha=\beta}^{n-\beta} a_\alpha a_{n-\alpha} \right|^2 .$$

Применяя неравенство Коши, получаем

$$A_n \leqslant \frac{4}{n(n^2-1)} \sum_{\beta=1}^{[n/2]} (n-2\beta+1)^2 \sum_{\beta=1}^{[n/2]} \left| \sum_{\alpha=\beta}^{n-\beta} a_\alpha a_{n-\alpha} \right|^2 =$$

$$= B_n \sum_{\beta=1}^{[n/2]} \frac{4(n-2\beta+1)^2}{n(n^2-1)} = \frac{2}{3} B_n.$$

Остается показать, что последняя сумма равна 2/3. Имеем

$$\sum_{\beta=1}^{[n/2]} (n-2\beta+1)^2 = \frac{3n^2 - 6n\left[\frac{n}{2}\right] + 4\left[\frac{n}{2}\right]^2 - 1}{3} \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n(n^2-1)}{6},$$

что завершает доказательство неравенства.

Легко установить, что равенство в неравенстве Коши имеет место тогда и только тогда, когда $a_n = a_1 q^{n-1}$ для всех n и некоторого числа q. Для экстремального конформного отображения f_0 имеем $a_1 \neq 0$ и сходимость ряда Тейлора в единичном круге эквивалентна неравенству $|q| \leq 1$. Следовательно,

$$f_q(\zeta) = \frac{a_1 \zeta}{1 - q\zeta} \quad (|q| \leq 1).$$

Если $|q| = 1$, то $f_q(\mathbb{D})$ – полуплоскость, причем $P(f_q(\mathbb{D})) = +\infty$. Поэтому необходимо рассмотреть лишь случай $|q| < 1$. Но при $|q| \in [0, 1)$ любая область $f_q(\mathbb{D})$ является кругом. Таким образом, доказанное неравенство является изопериметрическим, и равенство достигается лишь для круга.

Отметим, что к оценкам жесткости кручения привлекались численные методы (см., например, статью Д. А. Абрамова [1], монографию Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [20]).

5.2 Изопериметрические проблемы

Пусть Ω – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Через $P(\Omega)$ будем обозначать функционал, определенный для Ω формулой

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \left(2 \int_\Omega u(x)\, dx \right)^2 \Big/ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\ ,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ – дифференциальный элемент объема. Кроме того, мы будем пользоваться следующими стандартными обозначениями:

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

$|\Omega|$ – объем области Ω, ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)},$$

где Γ – гамма функция Эйлера.

Дальнейшее изложение в этом параграфе основано на результатах автора, опубликованных в статье [5].

Приведем сначала несколько вспомогательных фактов. Следующее утверждение хорошо известно и получается простым применением формулы Грина. Если $P(\Omega) < +\infty$, то

$$P(\Omega) = 2 \int_\Omega v(x)\, dx = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx, \tag{5.4}$$

где v – принадлежащее пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ обобщенное решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v = -2 & \text{в} \qquad \Omega, \\ v = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.5}$$

В частности, для шара $B_\rho(0)$ с центром в начале координат и радиуса $\rho > 0$ решение задачи (5.5) имеет вид

$$v(x) = \frac{\rho^2 - |x|^2}{n}, \qquad x \in B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь (5.4) и непосредственными вычислениями, получаем

$$P(B_\rho(0)) = \frac{2}{n}\int_{B_\rho(0)} (\rho^2 - |x|^2)dx = \frac{4\omega_n}{n(n+2)}\rho^{n+2}. \tag{5.6}$$

Следующее утверждение о монотонности $P(\Omega)$ позволяет упростить ряд доказательств путем перехода к подобластям с гладкими границами.

Лемма 5.2 *Предположим, что* $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty}\Omega_j$ *– область в* $\mathbb{R}^n$*, где* (Ω_j) *– неубывающая последовательность подобластей* Ω*. Тогда*

$$P(\Omega) = \lim_{j\to\infty} P(\Omega_j).$$

Доказательство леммы 5.2. Из вариационного определения $P(\Omega)$ как точной верхней границы непосредственно следует, что

$$0 \le P(\Omega_1) \le P(\Omega_2) \le \ldots \le P(\Omega_j) \le P(\Omega).$$

Но тогда существует конечный или бесконечный предел

$$l := \lim_{j\to\infty} P(\Omega_j) \le P(\Omega).$$

Докажем теперь, что $l \ge P(\Omega)$. Возьмем вещественнозначную функцию $u \in C_0^\infty(\Omega)$, и пусть $K = \operatorname{supp} u$ – носитель этой функции. Нетрудно видеть, что компакт $K \subset \Omega_j$ для всех $j \geq N$, начиная с некоторого номера N. Следовательно, мы можем считать, что $u \in C_0^\infty(\Omega_j)$ для всех $j \geq N$. Но тогда

$$I(u;\Omega) := \left(2\int_\Omega u(x)\,dx\right)^2 \Big/ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq P(\Omega_j) \leq l$$

для всех $j \geq N$. Фактически мы показали, что $I(u;\Omega) \leq l$ для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому $P(\Omega) \leq l$ согласно определению. Лемма 5.2 доказана.

Ниже мы неоднократно пользуемся этой леммой в сочетании со следующим стандартным приемом, часто применяемым в теории уравнений в частных производных. Следуя Лёвнеру и Ниренбергу [96], будем рассматривать "регулярные" области, а именно, области, граница которых состоит из конечного числа гладких $(n-1)$-мерных гиперповерхностей класса C^∞. Произвольная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ может быть представлена как объединение "регулярных" областей $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Omega = \cup_{j=1}^\infty \Omega_j, \quad \overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}.$$

Теорема 5.3 *Пусть* $n \geq 2$ *и пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– область. Тогда для любого числа* $p \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$P(\Omega) \leq \frac{4\omega_n}{n(n+2)} \left(\frac{n+p}{n\omega_n}\int_\Omega |x|^p\,dx\right)^{\frac{n+2}{n+p}}. \tag{5.7}$$

Для шара с центром в начале координат реализуется равенство.

Доказательство теоремы 5.3. Будем предполагать, что область Ω "регулярна", так как в силу леммы 5.2 достаточно доказать неравенство (5.7) лишь для "регулярных" областей. Поскольку область Ω "регулярна", то в ней существует классическое решение краевой задачи (5.5) $v = v(x)$, $x \in \Omega$, причем функция v является неотрицательной, принадлежит классу $C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и обращается в нуль на $\partial\Omega$.

Рассмотрим симметризацию Шварца для Ω и функции v. Хорошо известно (см., например, монографию К. Бэндл [67]), что

$$\int_\Omega v(x)\,dx = \int_{B_\rho(0)} v^*(x)\,dx,$$

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx \geq \int_{B_\rho(0)} |\nabla v^*(x)|^2\,dx,$$

где v^* – функция, полученная из v симметризацией по Шварцу, $\omega_n \rho^n$ равен объему области Ω. Таким образом, шар $B_\rho(0)$ имеет тот же объем, что и область Ω. Воспользуемся этими интегральными равенствами для функций v и v^*, вариационным определением $P(\Omega)$ и равенствами (5.4). Получаем оценки

$$P(\Omega) = I(v;\Omega) \leq I(v^*; B_\rho(0)) \leq$$

$$\leq \sup\{I(u; B_\rho(0)) \,:\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (B_\rho(0))\} = P(B_\rho(0)).$$

Пользуясь равенством $\omega_n \rho^n = |\Omega|$ и формулой (5.6), будем иметь

$$P(\Omega) \leq \frac{4\omega_n}{n(n+2)} \rho^{n+2} = \frac{4}{n(n+2)\omega_n^{2/n}} |\Omega|^{1+2/n}.$$

Тем самым, неравенство (5.7) доказано в частном случае, когда $p = 0$. Для доказательства общего случая применяем следующий результат автора и И. Р. Каюмова (см. [57], теорему 5.3): *если* $-n < p_1 < p_2 < \infty$, *то*

$$\left(\frac{p_1 + n}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^{p_1} dx \right)^{1/(n+p_1)} \leq \left(\frac{p_2 + n}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^{p_2} dx \right)^{1/(n+p_2)}. \quad (5.8)$$

Полагая $p_1 = 0$ и $p_2 = p > 0$, из (5.8) получаем

$$\frac{|\Omega|}{\omega_n} \leq \left(\frac{n+p}{n\omega_n} \int_{\Omega} |x|^p dx \right)^{n/(n+p)}. \tag{5.9}$$

Очевидно, неравенство (5.7) следует из своего частного случая, соответствующего параметру $p = 0$ и неравенства (5.9).

Далее, если $\Omega = B_\rho(0)$ для некоторого $\rho > 0$, то

$$\frac{n+p}{n\omega_n} \int_{B_\rho(0)} |x|^p dx = \rho^{n+p}.$$

Привлекая еще и равенство (5.6), видим, что для шара $\Omega = B_\rho(0)$ в неравенстве (5.7)имеет место равенство.

Из теоремы 5.3 при $p = 2$ и $p = 0$ вытекают прямые аналоги изопериметрических неравенств (5.2) и (5.3).

Следствие 5.3.1 *Для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ имеют место неравенства*

$$P(\Omega) \leq \frac{4}{n^2} \int_{\Omega} |x|^2 dx, \qquad P(\Omega) \leq \frac{4}{n(n+2)\omega_n^{2/n}} |\Omega|^{1+2/n}.$$

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа. Нам снова потребуется уравнение Лиувилля

$$2R\Delta R = n|\nabla R|^2 - 4n \tag{5.10}$$

для гиперболического радиуса $R = R(x, \Omega)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

При $n = 2$ следующее утверждение было доказано выше (см. теорему 2.9 и лемму 2.1).

Теорема 5.4 *Пусть $\alpha > -1$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – "регулярная"* *область. Тогда справедливы равенства*

$$\int_\Omega R^\alpha(x,\Omega)dx = \left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha+1}{2n}\right)\int_\Omega R^\alpha(x,\Omega)|\nabla R(x,\Omega)|^2 dx, \quad (5.11)$$

$$|\partial\Omega| := \int_{\partial\Omega} dS = -\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta R(x,\Omega)dx, \quad (5.12)$$

$$|\Omega| := \int_\Omega dx = \frac{n+2}{4n}\int_\Omega |\nabla R(x,\Omega)|^2 dx. \quad (5.13)$$

Доказательство теоремы 5.4. Согласно результатам Лёвнера и Ниренберга "регулярная" область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является областью гиперболического типа, причем $R(.,\Omega) \in C^\infty(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ и гиперболический радиус удовлетворяет граничным условиям

$$R(x,\Omega)=0, \qquad \frac{\partial R(x,\Omega)}{\partial n} = -2, \qquad x\in\partial\Omega, \quad (5.14)$$

где n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Как показывают непосредственные вычисления, для любого фиксированного $\alpha > -1$ уравнение Лиувилля (5.10) равносильно уравнению

$$\frac{\Delta R^{2+\alpha}}{2+\alpha} = \left(1+\alpha+\frac{n}{2}\right)R^\alpha|\nabla R|^2 - 2nR^\alpha, \quad x\in\Omega. \quad (5.15)$$

Формула Грина дает следующее равенство

$$\int_\Omega \Delta R^{2+\alpha}dx = (2+\alpha)\int_{\partial\Omega} R^{1+\alpha}\frac{\partial R}{\partial n}dS. \quad (5.16)$$

Привлекая формулы (5.15) и (5.14), легко приходим к интегральному равенству

$$\left(1+\alpha+\frac{n}{2}\right)\int_\Omega R^\alpha|\nabla R|^2dx = 2n\int_\Omega R^\alpha dx,$$

равносильному соотношению (5.11).

Равенство (5.12) также вытекает из соотношений (5.15) и (5.16). Полагаем $\alpha = -1$. Тогда равенство (5.16) принимает вид

$$\int_\Omega \Delta R \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial R}{\partial n} dS.$$

Отсюда следует (5.12), так как правая часть в последней формуле равна $-2\int_{\partial\Omega} dS = -2|\partial\Omega|$ в силу второго граничного условия из (5.14). Формула (5.13) следует из (5.11) при $\alpha = 0$. Теорема 5.4 доказана.

Теорема 5.5 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – "регулярная" область. Тогда*

$$\left(\int_\Omega R(x,\Omega)dx\right)^2 \leq \frac{n}{n+2}\,|\Omega|\,P(\Omega), \tag{5.17}$$

где равенство достигается в случае, когда Ω – шар.

Доказательство теоремы 5.5. По условию теоремы область Ω имеет гладкую границу. Поэтому

$$R(.,\Omega) \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \quad R(x,\Omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

следовательно, $R(.,\Omega) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поэтому

$$P(\Omega) = \sup\left\{I(u;\Omega)\,:\, u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\} \geq I(R;\Omega) =$$

$$= \left(2\int_\Omega R(x,\Omega)dx\right)^2 \bigg/ \int_\Omega |\nabla R(x,\Omega)|^2 dx\,.$$

Пользуясь формулой (5.11) теоремы 5.8 при $\alpha = 0$, т. е. формулой (5.13), получаем неравенство

$$\frac{n+2}{n|\Omega|}\left(\int_\Omega R(x,\Omega)dx\right)^2 \leq P(\Omega),$$

совпадающее с неравенством (5.17).

Пусть $\Omega = B_\rho(0)$. Тогда

$$\int_{B_\rho(0)} R(x, B_\rho(0))dx = \int_{B_\rho(0)} \frac{\rho^2 - |x|^2}{\rho} dx = \frac{2\omega_n \rho^{n+1}}{n+2}.$$

Это соотношение и формула (5.6) показывают, что для шара $B_\rho(0)$ неравенство (5.17) превращается в равенство. Теорема 5.5 доказана.

Привлекая еще и второе неравенство следствия 5.3.1, легко получаем

Следствие 5.5.1 *Справедливо изопериметрическое неравенство*

$$\int_\Omega R(x, \Omega)dx \leq \frac{2}{(n+2)\omega^{1/n}} |\Omega|^{1+1/n}. \tag{5.18}$$

Справедливо также

Следствие 5.5.2 *Имеет место оценка снизу*

$$\frac{n+2}{n|\Omega|} \left(\int_\Omega \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)dx \right)^2 \leq P(\Omega), \tag{5.19}$$

где $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ *– расстояние от точки* $x \in \Omega$ *до границы* Ω.

5.3 Нелинейные краевые задачи

Для решения ряда задач гидромеханики часто используется метод конформных отображений. Этот метод связан с построением некоторой аналитической функции, отображающей заданную область на искомую (см., например, монографию Д. В. Маклакова [32]). В частности, возникает хорошо исследованная задача определения конформного отображения g единичного круга по заданным граничным значениям модуля производной. Рассмотрим нелинейную краевую задачу подобного типа, связанную с гиперболической метрикой.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – односвязная область гиперболического типа с коэффициентом метрики Пуанкаре $\lambda_\Omega(z)$. Как обычно, предполагаем, что гауссова кривизна метрики равна -4. Требуется определить конформное отображение $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям

$$g(\overline{\mathbb{D}}) \subset \Omega; \quad g'(\zeta) \neq 0, \zeta \in \mathbb{D}; \quad \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |g'(re^{i\theta})| d\theta < \infty; \quad (5.20)$$

$$\lambda_\Omega\left(g(e^{i\theta})\right) |g'(e^{i\theta})| = e^{u(\theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (5.21)$$

где $u(\theta)$ – заданная функция, $u(\theta)$ и $e^{u(\theta)}$ предполагаются суммируемыми на отрезке $[0, 2\pi]$, т. е. $u \in L^1[0, 2\pi]$ и $e^u \in L^1[0, 2\pi]$. Конформность отображения g не включает в себя требование глобальной однолистности.

Потребуем дополнительно, что отображение g принадлежит классу В. И. Смирнова S_m, т. е. $\ln |g'(\zeta)|$ представим интегралом Пуассона в единичном круге через свои предельные значения, и g' принадлежит классу Харди H^1. Будем говорить, что решение задачи (5.20)-(5.21) единственно с точностью до неевклидова движения, если для любых двух решений g_1 и g_2 этой задачи существует конформный автоморфизм $T : \Omega \to \Omega$, такой, что $g_1(\zeta) \equiv T(g_2(\zeta))$ для любого $\zeta \in \mathbb{D}$. Следующее утверждение доказано нами в статье [2].

Теорема 5.6 *Существует решение $g \in S_m$ задачи* (5.20) – (5.21) *при указанных условиях на граничные функции. Это решение единственно в классе Смирнова S_m с точностью до неевклидова движения.*

Доказательство теоремы 5.6. Докажем сначала единственность решения от противного. Возможные решения нашей краевой задачи из класса Смирнова обозначим через g, g_1 и g_2. Нам потребуются также следующие обозначения:

$$w(\zeta) = w(\zeta; g) = \ln \lambda_\Omega(g(\zeta)),$$

$$\psi(\zeta) = \Phi(g(\zeta)), \quad w_j(\zeta) = w(\zeta; g_j), \quad \psi_j(\zeta) = \Phi(g_j(\zeta)),$$

где Φ – однолистное конформное отображение области Ω на единичный круг $\mathbb{D}$.

Поскольку решения аналитичны в единичном круге и замыкание области значений решения компактно вложено в область Ω, то

$$e^{w(\zeta)} = |\psi'(\zeta)|/(1 - |\psi(\zeta)|^2), \tag{5.22}$$

и справедливо уравнение Лиувилля в форме

$$4\, w_{\zeta\overline{\zeta}} = \Delta w = 4\, e^{4w} \tag{5.23}$$

Те же соотношения верны и для $w = w_j$ $(j = 1, 2)$. По известной теореме М. Рисса, условия на производную решения влекут непрерывную продолжимость решения на замыкание единичного круга и условие $\psi \in S_m$. Следовательно, $\ln |\psi'(\zeta)|$ представим интегралом Пуассона о плотностью $u(\theta) + \ln(1 - |\psi(e^{i\theta})|^2)$. Аналогичный факт верен и для функций $\ln |\psi_j'(\zeta)|$. Поэтому разность $\ln |\psi_1'(\zeta)| - \ln |\psi_2'(\zeta)|$ является непрерывной в замкнутом единичном круге как интеграл Пуассона с непрерывной плотностью. Но тогда и разность $\varphi := w_1 - w_2$ определяет функцию, непрерывную в замкнутом единичном круге, причем граничные значения этой функции равны нулю почти всюду, следовательно всюду в силу непрерывности. Стандартные рассуждения дают, что $\varphi(\zeta) \equiv 0$ в $\mathbb{D}$. В самом деле, если $\max \varphi(\zeta) = \varphi(\zeta_0) > 0$, то $\zeta_0 \in \mathbb{D}$, $\varphi(\zeta_0) = 0$, $\Delta\varphi(\zeta_0) \leq 0$. Привлекая уравнения вида (5.23) для функций $w = w_1$ и $w = w_2$ получаем, что

$$\Delta\varphi(\zeta_0) = 4\exp(2w_1(\zeta_0)) - 4\exp(2w_2(\zeta_0)) > 0,$$

а это противоречит неравенству $\Delta\varphi(\zeta_0) \leq 0$. Аналогично получаем, что функция $\varphi(\zeta)$ не может иметь отрицательного минимума. Таким образом доказано, что $\varphi(\zeta) \equiv 0$ в $\mathbb{D}$, т. е. $w_1(\zeta) \equiv w_2(\zeta)$ в $\mathbb{D}$, что и требовалось доказать.

При доказательстве существования решения снова будем пользоваться функциями w, ψ, введенными выше. Нам потребуются две леммы.

Лемма 5.3 *Существует вещественно- аналитическая в единичном круге функция w, удовлетворяющая уравнению (5.23) и следующим условиям*

$$\lim_{r\to 1} w(re^{i\theta}) = u(\theta) \quad \textit{почти всюду на} \quad [0, 2\pi], \tag{5.24}$$

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} exp(w(re^{i\theta}))d\theta < \infty. \tag{5.25}$$

Эта функция w допускает представление $w = w_0 + v$, где

$$a)\, w_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\left[u(\theta)d\theta + d\mu(\theta)\right] \tag{5.26}$$

с произвольной сингулярной ($\equiv$ невозрастающей непрерывной и имеющей почти всюду равную нулю производную) функцией μ;

б) вещественно-аналитическая е единичном круге функция v принадлежит пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{D})$, имеет нулевой след на границе, кроме того, v непрерывна в замкнутом единичном круге и удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = 4|g_0'(\zeta)|^2 e^{2v}, \tag{5.27}$$

причем $|g_0'(\zeta)| = e^{w_0(\zeta)}$, *т. е. функция* v *неявно зависит от произвольной сингулярной функции* μ *и* $v(e^{i\theta}) \equiv 0$ *на отрезке* $[0, 2\pi]$.

Доказательство леммы 5.3. Формула (5.23) определяет гармоническую функцию. Следовательно, если утверждения пункта б) леммы верны, то очевидно, что функция $w = w_0 + v$ будет удовлетворять уравнению (5.23). В силу известной теоремы В. И. Смирнова о параметрическом представлении функций класса Харди H^1, примененной к функции $|g_0'(\zeta)| = e^{w_0(\zeta)}$, получаем, что требования (5.24) и (5.25) будут выполнены для функции $w = w_0$ при произвольной сингулярной функции μ. Следовательно, остается показать существование решения уравнения (5.27) с нулевыми граничными значениями и обладающего указанными в пункте б) свойствами при любом выборе сингулярной функции.

Поскольку $g_0' \in H^1$, то в силу изопериметрического неравенства $|g'| = e^{w_0} \in L_2(\mathbb{D})$. Поэтому для любой непрерывно дифференцируемой в замкнутом единичном круге функции v существует интеграл

$$\iint_{\mathbb{D}} \left[|\nabla v(\zeta)|^2 + 4\, e^{2w_0(\zeta)} e^{2v(\zeta)} \right] d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{5.28}$$

Стандартные рассуждения (см., например, [34], с. 205-212) с использованием вариационного метода и интеграла (5.28) с учетом положительности и выпуклости экспоненциальной функции показывают, что существует единственная функция $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{D})$ с нулевым следом, доставляющая минимум интегралу (5.28) в том же классе функций. Очевидно, такая функция является искомым решением, причем $v(\zeta) \le 0$ почти всюду в единичном круге. В неположительности v можно убедиться следующим образом. Функция, определенная равенством $v_1(\zeta) = \min\{v(\zeta), 0\}$ является одной из допустимых функций, участвующих при минимизации интеграла (5.28). Обобщенные производные функции v совпадают по модулю с обобщенными производными v_1 в точках, где $v(\zeta) < 0$, и равны нулю в остальных точках единичного круга (см. теорему $F.1$ в [29], с.47). Но интеграл (5.28) для v_1 не превосходит интеграла (5.28) для v. Следовательно, $v(\zeta) = v_1(\zeta)$ почти всюду, поэтому $v(\zeta) \leq 0$ почти всюду в единичном круге.

Введя в рассмотрение вариацию $v_t = v + t\tilde{v}$ с гладкой функцией $\tilde{v}$, имеющей компактный носитель в единичном круге, как и в [34], глава 4, пункт 2, из условия экстремальности v получаем: для любой такой функции $\tilde{v}$

$$\iint_{\mathbb{D}} [(\nabla v(\zeta), \tilde{v}(\zeta) + f(\zeta)\, \tilde{v}(\zeta)]\, d\xi d\eta = 0, \quad \zeta = \xi + i\eta, \qquad (5.29)$$

где $f(\zeta) = 4exp\,[2w_0(\zeta) + 2v(\zeta)]$. Тогда имеем импликации

$$v \in W^k_{2,loc}(\mathbb{D}) \Longrightarrow f \in W^k_{2,loc}(\mathbb{D}) \Longrightarrow v \in W^{k+2}_{2,loc}(\mathbb{D}) \qquad (5.30)$$

для $k = 1$, следовательно, для любого натурального числа k. Действительно, первая импликация следует из положительности и вещественной аналитичности функции в единичном круге. Вторая импликация – известное утверждение, вытекающее из соотношения (5.29) (см. [34] глава 4. пункт 2). В силу (5.30), теорем Соболева о вложениях и теоремы Бернштейна функция v является вещественно аналитической и удовлетворяет в единичном круге уравнению (5.27).

Ниже в следующей лемме доказывается, что существует аналитическая в единичном круге функция ψ, удовлетворяющая равенству (5.22) и такая, что $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, если задано вещественно аналитическое решение w уравнения (5.23). Для такой функции ψ в силу (5.22) и (5.25) будем иметь

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \frac{|\psi'(re^{i\theta})|}{1 - |\psi(re^{i\theta}|^2} d\theta < \infty, \qquad (5.31)$$

следовательно, область $\psi(\mathbb{D})$ лежит в круге $\mathbb{D}$ и ограничена кривой, спрямляемой в гиперболической метрике этого круга. Отсюда следует, что область $\psi(\mathbb{D})$ компактно вложена в единичный круг, а сама функция ψ является непрерывной в замкнутом круге по теореме М. Рисса. Но тогда функция v^*, определенная равенствами

$$v^*(\zeta) = v(\zeta) + \ln(1 - |\psi(\zeta)|^2) \equiv \ln|\psi'(\zeta)| - w_0(\zeta),$$

является гармонической в круге $\mathbb{D}$ и

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}(v^*(re^{i\theta}))^2 d\theta < \infty$$

в силу (5.23) и непрерывности функции $v^* - v$. Следовательно, функция v^* представима интегралом Пуассона по своим предельным значениям. Поскольку $v^*(e^{i\theta}) = \ln(1 - |\psi(e^{i\theta})|^2)$, то функции v^* и v являются непрерывными в замкнутом единичном круге.

Следующее утверждение доказано И. Н. Векуа [22].

Лемма 5.4 *Пусть w – вещественнозначная и вещественно аналитическая функция, удовлетворяющая в единичном круге уравнению Лиувилля $\Delta w = 4e^{2w}$. Тогда существует единственная аналитическая в единичном круге функция ψ, удовлетворяющая всюду в $\mathbb{D}$ соотношению* (5.22), *причем $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ и ψ нормирована условиями:*

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = e^{w(0)}, \quad \psi''(0) = 2w_\zeta(0)e^{w(0)}. \tag{5.32}$$

Доказательство леммы 5.4. В силу (5.22) имеем: $\ln w_{\zeta\bar\zeta} = 2w$. Отсюда имеем $w_{\zeta\bar\zeta\zeta} - 2w_\zeta w_{\zeta\bar\zeta} \equiv 0$, поэтому функция $f(\zeta) = w_{\zeta\zeta} - w_\zeta^2$ является аналитической в единичном круге. Для заданной функции f из (5.32) мы можем найти мероморфную и локально однолистную функцию ψ, удовлетворяющую условиям (5.32), как решение уравнения Шварца $S_\psi(\zeta) = 2f(\zeta)$, где $S_\psi(\zeta)$ – шварциан функции ψ в точке ζ.

Обозначим $w_1(\zeta) := \ln|\psi'(\zeta)| - \ln(1-|\psi(\zeta)|^2)$. Можно показать, что $w_1(\zeta) \equiv w(\zeta)$. Действительно, обе функции w и w_1 удовлетворяют уравнению Лиувилля (5.23) и соотношениям

$$f(\zeta) = w_{\zeta\zeta} - w_\zeta^2 == w_{1\zeta\zeta} - w_{1\zeta}^2.$$

Имеем

$$w(0) = w_1(0), \quad w_\zeta(0) = w_{1\zeta}(0).$$

Пользуясь этими соотношениями, уравнениями Лиувилля и локальными разложениями функций в степенные ряды по степеням нетрудно убедиться в равенстве $w_1(\zeta) \equiv w(\zeta)$ (см. подробные вычисления в статьях [22] или [2]).

Пользуясь приведенными леммами, легко завершить доказательство теоремы. Пусть ψ и $w = w_0 + v$– функции, определенные в леммах 5.3, 5.4.

Имеем: $\psi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathbb{D}$, так как $\psi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ и ввиду ограниченности области $\psi(\mathbb{D})$ кривой, спрямляемой в гиперболической метрике единичного круга (см. формулу (5.31)), функция ψ непрерывна в замкнутом единичном круге, следовательно, $\psi(\partial\mathbb{D})$ лежит внутри единичного круга. Но тогда $g(\zeta) := \Phi^{-1}(\psi(\zeta))$ определяет некоторое конформное отображение единичного круга, причем $g(\overline{\mathbb{D}}) \subset \Omega$, функция g непрерывна в замкнутом единичном круге и выполняется краевое условие из (5.21).

Далее, справедлива формула

$$\ln|\psi'(\zeta)| = w_0(\zeta) + v(\zeta) + \ln(1 - |\psi(\zeta)|^2).$$

Поскольку при любом выборе сингулярной функции μ разность $\ln|\psi'(\zeta)| - w_0(\zeta)$ непрерывна в замкнутом единичном круге, то условие $\psi \in S_m$ (т. е. условие $g \in S_m$) равносильно представимости w_0 интегралом Пуассона. Так как в лемме 5.3 выбор функции μ произволен, то при $\mu(\theta) \equiv const$ получаем функцию $g \in S_m$, что и требовалось доказать.

Этим и завершается доказательство теоремы.

Доказательство этой теоремы и соответствующие теоремы из пунктов 1.6 и 2.1 показывают, что существует тесная связь между шварцианом $S_f(\zeta)$ конформного отображения $f : \mathbb{D} \to \Omega$ и частными производными коэффициента $\lambda_\Omega(z)$ метрики Пуанкаре. Шварциан конформного отображения, предшварциан и конформный радиус возникают также при исследовании разрешимости и единственности решения внешних обратных краевых задач. Опишем кратко некоторые факты.

Рассмотрим аналитическую функцию $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, такую, что $f'(\zeta) \neq 0$ всюду в единичном круге. Требуется найти однозначную функцию F, производная которой определяется формулой

$$F'(\zeta) = f'(\zeta) \left(\frac{1 - \overline{a}\zeta}{\zeta - a} \right)^{m+1}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

где $m \in \mathbb{N}$ – фиксированное число, $a \in \mathbb{D}$ – некоторое комплексное число, значение которого заранее не задано.

Функция F восстанавливается интегрированием, при этом может появиться логарифмическая особенность в точке $\zeta = a$. Требуется определить параметр $a \in \mathbb{D}$ из условия, гарантирующего однозначность функции F ($\equiv$ отсутствие логарифмической особенности у функцию F), что равносильно требованию о равенстве нулю вычета $F'(\zeta)$ в точке $\zeta = a$, т. е. следующему уравнению:

$$res_a \left\{ f'(\zeta) \left(\frac{1 - \overline{a}\zeta}{\zeta - a} \right)^{m+1} \right\} = 0.$$

Вычисления показывают (см., например, [13], гл. 4), что это нелинейное уравнение относительно $a \in \mathbb{D}$ можно записать в следующем виде

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\, m!\, \overline{a}^{\,m-k}\, (1-|a|^2)^k\, f^{(k+1)}(a)}{(k!)^2 (m-k)!\, (k+1)} = 0. \tag{5.33}$$

Естественно, при $m = 1$ уравнение (5.33) совпадает с известным уравнением Гахова (см., например, [13], гл. 4, и статью [28]):

$$\frac{f''(a)}{f'(a)} = \frac{2\overline{a}}{1-|a|^2},$$

а при $m = 2$ уравнение (5.33) содержит шварциан функции f, а именно, имеет вид

$$\frac{2}{3} S_f(a) + \left(\frac{f''(a)}{f'(a)} - \frac{2\overline{a}}{1-|a|^2} \right)^2 = 0.$$

При исследовании структуры корней уравнения (5.33) для случая $m \geq 3$ оказались полезными обобщения шварциана, а именно, следующие шварцианы порядка $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,\, 2\}$ (см. статью [17]):

$$S_n(f;\zeta) := \frac{f^{(n)}(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{n!}{2^{n-1}} \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right)^{n-1}. \tag{5.34}$$

Очевидно, $S_3(f;\zeta) \equiv S_f(\zeta)$. Формула (5.34) корректна и при $n = 1$ или $n = 2$, но легко видеть, что $S_1(f;\zeta) \equiv S_2(f;\zeta) \equiv 0$. Отметим также, что $S_n(f;\zeta) \equiv 0$ при любом $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,\, 2\}$, если f является невырожденным дробно-линейным отображением.

5.4 Сферические потенциалы

Рассмотрим два сферических потенциала в пространствах $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{C}^n$ при $n \geq 1$. Первый из них – следующий потенциал Рисса

$$P_{n,\alpha}(x, f) = \int_{S^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n+\alpha}} d\sigma_y \tag{5.35}$$

сферы $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| = 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ для $|x| \neq 1$, и второй – комплексный потенциал

$$Q_{n,\alpha}(z, F) = \int_{S^{2n-1}} \frac{F(\zeta)}{|1-(z,\zeta)|^{n+\alpha}} d\sigma_\zeta \tag{5.36}$$

сферы $S^{2n-1} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| = 1\}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ для $|z| < 1$. В формулах (5.35) и (5.36) величины $d\sigma_y$ и $d\sigma_\zeta$ означают дифференциальные элементы площади поверхности сфер $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, соответственно, и $(z, \zeta) = z_1\overline{\zeta}_1 + z_2\overline{\zeta}_2 + \cdots + z_n\overline{\zeta}_n$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Аддитивные представления для потенциалов (5.35) и (5.36) используются часто (см., например, [88], [110], [114]). Наша цель – получить для них новые формулы для явного выделения сингулярностей в случае, когда α – комплексное число, такое, что $\Re\alpha > 0$.

Новые формулы будут применяться для получения точных оценок для функций

$$|1 - |x|^2|^\beta P_{n,\alpha}(x, f)$$

и

$$|1 - |z|^2|^\beta Q_{n,\alpha}(z, F),$$

когда $\beta \geq \Re\alpha$ и плотности f и F принадлежат L^q с $q > 1$. Ясно, что имеем равенство

$$P_{1,\alpha}(x,f) \equiv Q_{1,\alpha}(z,F),$$

если положить $f = F$ и $x := (x_1, x_2)$, $z := (x_1 + ix_2)$. Однако в общем случае, когда $n \geq 2$, функция $Q_{n,\alpha}(z,F)$ не совпадает с функцией $P_{2n-1,\alpha}(x,f)$.

Преобразуем интеграл (5.35) заменой переменных с использованием преобразований Мёбиуса. Рассмотрим сначала простейший случай $n = 0$. Можем взять $S^0 = \{-1, 1\}$ и

$$P_{0,\alpha}(x,f) := \frac{f(-1)}{|x+1|^\alpha} + \frac{f(1)}{|x-1|^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus S^0,$$

для любой функции $f : S^0 \to \mathbb{C}$. Если $T_0 : S^0 \to S^0$ является инволюцией, т. е. $T_0(1) = -1$, $T_0(-1) = 1$, то имеет место тождество

$$P_{0,\alpha}(x,f) = \frac{|x-1|^\alpha f(-1) + |x+1|^\alpha f(1)}{|1-x^2|^\alpha} = \frac{1}{|1-x^2|} P_{0,-\alpha}(x, f \circ T_0)$$

в $\mathbb{R} \setminus S^0$. Удивительным образом эта элементарная формула допускает обобщения на случай $n \geq 1$.

В случае $n \geq 1$ для фиксированной $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$, $|x| \neq 0$, рассмотрим следующее преобразование Мёбиуса для пространства $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$T_{n,x}(y) = x + \frac{(|x|^2 - 1)(y - x)}{|y - x|^2}, \quad |x| > 1,$$

$$T_{n,x}(y) = \frac{x}{|x|^2} + \frac{(|x|^{-2} - 1)(y - x/|x|^2)}{|y - x/|x|^2|^2}, \quad 0 < |x| < 1. \qquad (5.37)$$

Преобразование $T_{n,x}$ является конформным автоморфизмом шара $B_{n+1} := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| \leq 1\}$ и его ограничение $T_{n,x} \,|\, S^n$

представляет собой инверсию S^n относительно сферы

$$S_x^{n-1} = \left\{ y \in S^n \,:\, |y - x| = \sqrt{|1 - |x|^2|} \right\}.$$

Следующие ниже утверждения этого пункта доказаны нами в статье [51].

Теорема 5.7 *Предположим, что $n \geq 1$ и $f \in L^1(S^n)$. Для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ и для всех $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$, $|x| \neq 0$, справедливо следующее тождество*

$$\int_{S^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n+\alpha}} d\sigma_y = \frac{1}{|1 - |x|^2|^\alpha} \int_{S^n} \frac{f(T_{n,x}(y))}{|x - y|^{n-\alpha}} d\sigma_y. \tag{5.38}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n$, $|x| \neq 0$. Для упрощения вычислений будем пользоваться новым ортонормированным базисом $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$, полученным вращением $\mathbb{R}^{n+1}$ вокруг начала координат и таким, что $x = |x| e_1$. Предположим, что

$$y = \sum_{k=1}^{n+1} y_k e_k \qquad \text{и} \qquad u = T_{n,x}(y) = \sum_{k=1}^{n+1} u_k e_k.$$

Непосредственные вычисления с использованием формулы (5.37) и ей предшествующей дают

$$u_1 = T_{1,|x|}(y_1) := \frac{2|x| - (1 + |x|^2) y_1}{1 + |x|^2 - 2|x| y_1} \tag{5.39}$$

и

$$u_k = \frac{|1 - |x|^2|}{1 + |x|^2 - 2|x| y_1} y_k = \sqrt{\frac{1 - u_1^2}{1 - y_1^2}} y_k, \quad 2 \leq k \leq n + 1, \tag{5.40}$$

в обоих случаях: $|x| > 1$ или $0 < |x| < 1$. Чтобы вывести вторые равенства для u_k в (5.40) мы воспользовались таким следствием формулы (5.39):

$$1-u_1^2=\frac{(1-|x|^2)^2}{(1+|x|^2-2|x|y_1)^2}(1-y_1^2). \tag{5.41}$$

Более того, равенство (5.39) влечет, что $y_1=T_{1,|x|}(u_1)$, поэтому

$$1-y_1^2=\frac{(1-|x|^2)^2}{(1+|x|^2-2|x|u_1)^2}(1-u_1^2). \tag{5.42}$$

Пользуясь (5.39) и (5.40), получаем также, что $u=T_{n,x}(y)\in S^n$ для любого $y\in S^n$, и что $T_{n,x}\,|\,S^n$ – инволюция S^n. Из (5.41), (5.42) следует $(1+|x|^2-2|x|y_1)(1+|x|^2-2|x|u_1)=(1-|x|^2)^2$, что эквивалентно равенству

$$|x-u|\cdot|x-y|=|1-|x|^2| \tag{5.43}$$

для любого $y\in S^n$ и $u=T_{n,x}(y)$. Таким образом,

$$\int_{S^n}\frac{f(u)}{|x-u|^{n+\alpha}}d\sigma_u=$$

$$=\frac{1}{|1-|x|^2|^{n+\alpha}}\int_{S^n}f(T_{n,x}(y))|x-y|^{n+\alpha}I(y)d\sigma_y, \tag{5.44}$$

где $I(y)=d\sigma_u/d\sigma_y$ – якобиан отображения $T_{n,x}\,|\,S^n$ $(u=T_{n,x}(y))$. Для вычисления $I(y)$ берем диффеоморфизм $K:B_{n+1}\to B_{n+1}$, определенный равенствами

$$(K\,|\,S^n)(\xi)=(T_{n,x}|\,S^n)(\xi)\quad \text{для}\quad \xi\in S^n$$

и

$$v=K(\xi)=\sum_{k=1}^{n+1}v_ke_k\quad \text{для}\quad |\xi|<1,$$

где

$$v_1 = T_{1,|x|}(\xi_1), \quad v_k = \sqrt{\frac{1-v_1^2}{1-\xi_1^2}}\,\xi_k \quad \text{для} \quad 2 \le k \le n+1. \tag{5.45}$$

Для любого $\xi \in S^n$ и $v = K(\xi)$ имеем

$$I(y) = \lim_{\xi \to y, |\xi|<1} \frac{1-|\xi|}{1-|v|} \left| \det \left(\frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} \right)_{1 \le j,k \le n+1} \right| =$$

$$= \lim_{\xi \to y, |\xi|<1} \frac{1-|\xi|^2}{1-|v|^2} \left| \det \left(\frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} \right)_{1 \le j,k \le n+1} \right|.$$

Поскольку

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} = -\frac{1-v_1^2}{1-\xi_1^2}, \quad \frac{\partial v_k}{\partial \xi_k} = \sqrt{\frac{1-v_1^2}{1-\xi_1^2}} \quad \text{для} \quad k \ge 2$$

и

$$\frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} = 0 \quad \text{для} \quad j > k \ge 1,$$

то имеем

$$I(y) = \lim_{\xi \to y, |\xi|<1} \frac{1-|\xi|^2}{1-|v|^2} \left(\frac{1-v_1^2}{1-\xi_1^2} \right)^{1+n/2}.$$

Из (5.45) следует, что

$$1-|v|^2 = \frac{1-v_1^2}{1-\xi_1^2}(1-|\xi|^2).$$

Пользуясь этим, а также формулой (5.42) для

$$v = T_{n,x}(y) = K(y) \in S^n,$$

получаем
$$I(y) = \frac{|1-|x|^2|^n}{|x-y|^{2n}}, \quad y \in S^n. \tag{5.46}$$
Формулы (5.44) и (5.46) влекут (5.38). Этим и завершается доказательство теоремы 5.7.

Функция $P_{1,\alpha}(r,1)$ используется во многих пространствах функций, аналитических в единичном круге. Нам потребуется бета функция Эйлера
$$B\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}.$$

Следствие 5.7.1 *Если* $0 \le r < 1$, $\alpha > 0$ *и* $\alpha \ne 1$, *то*
$$\frac{2\pi}{(1-r^2)^\alpha} \le \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{1+\alpha}} < \frac{2^\alpha B\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha}{2}\right)}{(1-r^2)^\alpha}.$$
Равенство в левом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $r = 0$. *Правое неравенство является асимптотически точным при* $r \to 1-0$.

Доказательство. По теореме 5.7
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{1+\alpha}} = \frac{1}{(1-r^2)^\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{1-\alpha}}.$$
Согласно теореме Харди $P_{1,-\alpha}(.,1)$ является возрастающей функцией на отрезке $[0,1)$, если $\alpha \ne 1$. Следовательно, для любых $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$ и $\alpha \ne 1$
$$(1-r^2)^\alpha P_{1,\alpha}(r,1) > P_{1,-\alpha}(0,1) = 2\pi,$$
$$(1-r^2)^\alpha P_{1,\alpha}(r,1) <$$
$$< \lim_{r\to 1-0}(1-r^2)^\alpha P_{1,\alpha}(r,1) = P_{1,-\alpha}(1,1) = 2^\alpha B\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha}{2}\right).$$
Этим и завершается доказательство следствия 5.7.1.

Рассмотрим теперь сферы S^{2n-1} в пространстве $\mathbb{C}^n$. Пусть B – единичный шар $\{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| < 1\}$, $\partial B = S^{2n-1}$. Для фиксированного $z \in B \setminus \{0\}$ рассмотрим биголоморфное отображение $\Phi_{n,z}$ шара B на шар B, определенное следующим образом (см. [110]):

$$\Phi_{n,z}(\zeta) = \frac{z - p_z(\zeta) - \sqrt{1-|z|^2}(\zeta - p_z(\zeta))}{1 - (\zeta, z)},\ |\zeta| \le 1,$$

где

$$p_z(\zeta) = \frac{z}{|z|^2}(\zeta, z).$$

Известно (см. [110]), что

(i) $\Phi_{n,z}$ является инволюцией, т. е. $\Phi_{n,z}(\Phi_{n,z}(\zeta)) = \zeta$ для любого $\zeta \in \overline{B}$;

(ii) $\Phi_{n,z}$ удовлетворяет условиям

$$\Phi_{n,z}(z) = 0, \quad \Phi_{n,z}(\frac{z}{|z|}) = -\frac{z}{|z|},$$

$$\Phi_{n,z}(\zeta) \in S^{2n-1} \quad \text{и} \quad \Phi_{n,z}(\zeta) \ne \zeta \quad \text{для любого} \quad \zeta \in S^{2n-1};$$

(iii) $\Phi_{n,z} \,|\, S^{2n-1} : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ – диффеоморфизм;

(iv) справедливо тождество

$$1 - (\Phi_{n,z}(\zeta), \Phi_{n,z}(w)) = \frac{(1-|z|^2)(1-(\zeta, w))}{(1-(\zeta, z))(1-(z, w))}.$$

Отметим, что утверждение следующей теоремы 5.8 известно в случае $\alpha = n$ (см. [110], гл. 1).

Теорема 5.8 *Предположим, что* $\alpha \in \mathbb{C}$, $F \in L^1(S^{2n-1})$. *Для* $z \in B \setminus \{0\}$ *справедливо следующее тождество:*

$$\int_{S^{2n-1}} \frac{F(\zeta) d\sigma_\zeta}{|1-(z,\zeta)|^{n+\alpha}} = \frac{1}{(1-|z|^2)^\alpha} \int_{S^{2n-1}} \frac{F(\Phi_{n,z}(\zeta)) d\sigma_\zeta}{|1-(z,\zeta)|^{n-\alpha}}, \qquad (5.47)$$

где $S^{2n-1} = \partial B = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| = 1\}$.

Доказательство. Пусть $z \in B \setminus \{0\}$. Взяв $w = \Phi_{n,z}(\zeta)$, $\zeta \in S^{2n-1}$, будем иметь

$$\int_{S^{2n-1}} \frac{F(w)d\sigma_w}{|1-(z,w)|^{n+\alpha}} = \int_{S^{2n-1}} \frac{F(\Phi_{n,z}(\zeta))I(\zeta)d\sigma_\zeta}{|1-(z,\Phi_{n,z}(\zeta))|^{n+\alpha}}. \tag{5.48}$$

Из свойств (i), (ii) и (iv) получаем $\zeta = \Phi_{n,z}(w)$ и

$$1-(w,\zeta) = \frac{(1-|z|^2)(1-(\zeta,w))}{(1-(\zeta,z))(1-(z,w))}, \quad (\zeta,w) \neq 1.$$

Следовательно, для любых $\zeta \in S^{2n-1}$ и $w = \Phi_{n,z}(\zeta)$

$$|1-(z,w)| \cdot |1-(z,\zeta)| = 1-|z|^2. \tag{5.49}$$

Согласно теореме 3.3.8 из [110], якобиан

$$I(\zeta) = \frac{d\sigma_w}{d\sigma_\zeta} = \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-(z,\zeta)|^{2n}}. \tag{5.50}$$

Из (5.48), (5.49) и (5.50) имеем (5.47). Этим завершается доказательство теоремы.

В [110] (см. там Предложение 1.4.10 для $-\frac{n+\alpha}{2} \notin \mathbb{N}$) доказано, что

$$Q_{n,\alpha}(z,1) = \frac{\sigma_{2n-1}\Gamma(n)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(k+\frac{n+\alpha}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n)}|z|^{2k}, \tag{5.51}$$

а также

$$Q_{n,\alpha}(z,1) \approx (1-|z|^2)^{-\alpha} \quad \text{для} \quad \alpha > 0. \tag{5.52}$$

Отметим, что

$$\sigma_{2n-1} = \int_{S^{2n-1}} d\sigma_\zeta = \frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}$$

является площадью поверхности S^{2n-1} в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, и в [110] рассматривается нормированная мера $d\sigma(\zeta) = d\sigma_\zeta/\sigma_{2n-1}$. Поэтому $Q_{n,\alpha}(z,1)/\sigma_{2n-1}$ и есть $I_c(z)$ из [110], гл. 1, с $c = \alpha$. Пользуясь теоремой 5.8 и разложением (5.51), получаем улучшенную версию (5.52).

Следствие 5.8.1 *Если* $\alpha > 0$, $z \in B_n$ *и* $F \in L^\infty(S^{2n-1})$, *то*

$$\left| \int_{S^{2n-1}} \frac{F(\zeta)d\sigma_\zeta}{|1-(z,\zeta)|^{n+\alpha}} \right| \le \frac{2\pi^n \Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2})} \frac{||F||_\infty}{(1-|z|^2)^\alpha}, \tag{5.53}$$

где $||F||_\infty = \sup\{|F(\zeta)| : \zeta \in S^{2n-1}\}$. *Если* $F(\zeta) = \mathrm{const.} \neq 0$, *то неравенство* (5.53) *является асимптотически точным при* $|z| \to 1-0$.

Доказательство. Пользуясь теоремой 5.8 и разложением (5.51), имеем

$$\sup_{||F||_\infty = 1} |Q_{n,\alpha}(z,F)|(1-|z|^2)^\alpha =$$

$$= Q_{n,-\alpha}(|z|,1) = \sigma_{2n-1} F\left(\frac{n-\alpha}{2}, \frac{n-\alpha}{2}; n, |z|^2\right), \tag{5.54}$$

где $F(a,b;c;|z|^2)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Поскольку $c-a-b = \alpha > 0$, то по формуле Гаусса

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Взяв $c = n$, $a = b = (n-\alpha)/2$ и переходя к пределу при $|z| \to 1-0$, получаем

$$Q_{n,-\alpha}(1,1) = \frac{2\pi^n \Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2})} \tag{5.55}$$

(см. иное доказательство (5.55) в [110], Теорема 4.2.7). Равенства

(5.54), (5.55) и такое следствие (5.51)

$$Q_{n,-\alpha}(|z|,1) \leq \lim_{|z|\to 1-0} Q_{n,-\alpha}(|z|,1) = Q_{n,-\alpha}(1,1)$$

влекут (5.53) и асимптотическое равенство

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)^{\alpha} Q_{n,\alpha}(z,1) = \frac{2\pi^n \Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2})}.$$

Этим и завершается доказательство следствия 5.8.1.

Глава 6

Исторические сведения и литература

Д. Гильберт сравнил геометрию с большим цветущим садом, где каждый может найти себе прекрасный цветок. Цветы, которые нас интересуют, называются метрикой Пуанкаре и гиперболическим радиусом.

В двух последующих пунктах кратко напомним несколько других базовых фактов и идей, необходимых для более полного понимания метрики Пуанкаре и ее приложений. Во-первых, приведем систему аксиом, так как кроме аксиомы о параллельных в остаточных знаниях хорошо сохраняется лишь аксиома о существовании и единственности прямой, проходящей через две точки, а остальные аксиомы приходится вспоминать. Во-вторых, необходимо упоминание о глубокой теории автоморфных функций, интерес к которым и привел Пуанкаре к новой модели геометрии Лобачевского.

Отметим попутно, что книги [19], [21], [23], [24], [27], [33], [43], [47], [64], [67], [88], [83] представляют лишь малую часть большого числа монографий и учебников, затрагивающих гиперболическую геометрию и ее приложения.

6.1 Аксиомы геометрии Лобачевского

Вернемся к модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, в которой роль плоскости играет единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, причем точками неевклидовой геометрии считаются точки единичного круга, а в качестве "прямых" берутся лежащие в этом круге дуги окружностей, ортогональных к единичной окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, и диаметры этого круга.

Забудем временно метрику Пуанкаре, но будем считать известным, что в этой новой геометрии движения задаются конформными автоморфизмами единичного круга $\mathbb{D}$. В частности, две геометрические фигуры, лежащие в $\mathbb{D}$, считаются равными, если одна из них получается из другой как взаимно однозначный образ при однолистном конформном отображении круга $\mathbb{D}$ на себя, т. е. при отображении вида

$$z = T(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}).$$

Оказывается, для получающейся новой геометрии выполняются все аксиомы, на которых строится планиметрия Евклида, за исключением аксиомы о параллельных прямых.

Опишем кратко группы аксиом планиметрии Лобачевского, следуя А. И. Маркушевичу [33] с использованием классификации Д. Гильберта для аксиом геометрии. Эти аксиомы планиметрии Лобачевского нетрудно доказать как простенькие теоремы геометрии Евклида, относящиеся к точкам и "прямым" в круговой модели Пуанкаре.

Аксиомы соединения:

1) *для любых двух точек z_1 и z_2 из $\mathbb{D}$ существует "прямая", проходящая через эти точки*;

2) *для любых двух точек z_1 и z_2 из $\mathbb{D}$ существует не более одной "прямой", проходящей через эти точки*;

3) *на каждой "прямой" существуют по крайней мере две точки, а в единичном круге существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной "прямой".*

Далее идет группа аксиом порядка:

1) *если z_1, z и z_2 из $\mathbb{D}$ являются точками одной "прямой" и z лежит между z_1 и z_2, то z лежит также между z_2 и z_1;*

2) *если z_1и z_2 из $\mathbb{D}$ являются точками одной "прямой", то существует по крайней мере одна точка z, лежащая между z_1 и z_2;*

3) *среди любых трех точек "прямой" существует не более одной точки, лежащей между двумя другими;*

4) *пусть z_1, z и z_2 из $\mathbb{D}$ не являются точками одной "прямой", и пусть L – "прямая", не проходящая ни через одну из точек z, z_1 и z_2. Если L проходит через точку отрезка $[z_1, z]$, то эта прямая обязательно проходит через точку отрезка $[z_1, z_2]$ или же через точку отрезка $[z, z_2]$.*

Здесь отрезок означает часть "прямой" содержащей все точки "прямой", лежащие между концевыми точками.

Два отрезка $[z_1, z_2]$, $[\zeta_1, \zeta_2]$ считаются конгруентными (т. е. равными), если $[z_1, z_2] = T([\zeta_1, \zeta_2])$, где T – одно из конформных автоморфизмов единичного круга $\mathbb{D}$. Конгруентность отрезков или составленных из них фигур будем обозначать символом "$\equiv$".

Множество $K \subset \mathbb{D}$ называется гиперболически выпуклым, если для любых точек $z_1 \in K$ и $z_2 \in K$ "отрезок" $[z_1, z_2] \subset K$.

Как и в геометрии Евклида углом называют совокупность двух "полупрямых", исходящих из одной и той же точки $z \in \mathbb{D}$ и не являющихся частями одной и той же "прямой". Эта точка называется вершиной угла, а "полупрямые" – сторонами угла. Стороны угла делят круг $\mathbb{D}$ на две области, и одна из них (и только одна) является гиперболически выпуклым множеством. Эту область называют внутренностью угла. Угол, образованный "полупрямыми" g и h, будем обозначать $A(g, h)$.

Три точки z_1, z_2 и z_3 из $\mathbb{D}$, не лежащие на одной и той же "прямой", являются вершинами треугольника со сторонами $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ и $[z_3, z_1]$. Внутренность треугольника является гиперболически выпуклым множеством. Если g и h – "полупрямые", исходящие из точки z_1 и содержащие отрезки $[z_1, z_2]$ и $[z_1, z_3]$, то угол $A(g, h) =: A(z_1)$ называется углом треугольника при вершине z_1, противолежащим стороне $[z_2, z_3]$.

Аксиомы конгруентности:

1) *если* z_1, *и* z_2 *из* $\mathbb{D}$ *являются точками "прямой"* L *и* z_1' – *точка на той же или на другой "прямой"* L', *то по данную от точки* z_1' *сторону "прямой"* L' *существует одна и только одна точка* z_2', *такая, что* $[z_1, z_2] \equiv [z_1', z_2']$;

2) *если* $[z_1, z_2] \equiv [z_1', z_2']$ *и* $[z_1, z_2] \equiv [z_1'', z_2'']$, *то* $[z_1, z_2] \equiv [z_1'', z_2'']$;

3) *пусть* $[z_1, z_2]$ *и* $[z_2, z_3]$ – *два отрезка одной и той же "прямой" без общих внутренних точек, и пусть* $[z_1', z_2']$ *и* $[z_2', z_3']$ – *два отрезка этой же или другой "прямой" также без общих внутренних точек. Тогда, если* $[z_1, z_2] \equiv [z_1', z_2']$ *и* $[z_2, z_3] \equiv [z_2', z_3']$, *то и* $[z_1, z_3] \equiv [z_1', z_3']$;

4) *даны угол* $A(g, h)$, *"прямая"* L' *и "полупрямая"* $h' \subset L'$, *исходящая из некоторой точки* $z' \in L'$. *Тогда по данную сторону от "прямой"* L' *существует одна и только одна полупрямая* g', *выходящая из точки* $z' \in L'$ *и такая, что* $A(g, h) = A(g', h')$;

5) *если для треугольников* (z_1, z_2, z_3) *и* (z_1', z_2', z_3') *имеют место равенства сторон* $[z_1, z_2] \equiv [z_1', z_2']$, $[z_1, z_3] \equiv [z_1', z_3']$ *и равенство углов* $A(z_1) = A(z_1')$ *при вершинах* z_1 *и* z_1' *соответственно, то* $A(z_2) = A(z_2')$ *и* $A(z_3) = A(z_3')$.

Понятия величины угла и длины отрезка в геометрии Лобачевского по модели Пуанкаре определяются следующим образом. Вопрос о мере угла $A(g, h)$ решается просто: в качестве меры угла принимается евклидова величина угла в радианах между "полупрямыми" g и h.

Формулу расстояния $\rho(z_1, z_2)$ для $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ приходится выводить с учетом требования конформной инвариантности метрики Пуанкаре. Все требования на расстояние будут выполнены при следующем определении

$$\rho(z_1, z_2) = C \ln \frac{1 + |(z_1 - z_2)/(1 - \overline{z_1}\ z_2)|}{1 - |(z_1 - \ z_2)(1 - \overline{z_1}\ z_2)|},$$

где C – фиксированная положительная постоянная. Очевидно, плотность метрики определяется формулой

$$\lambda(z) := \lim_{z_1, z_2 \to z} \frac{\rho(z_1, z_2)}{|z_1 - z_2|} = \frac{2\,C}{1 - |z|^2}.$$

Будем считать, что постоянная $C = 1/2$ в соответствии с принятой моделью Пуанкаре.

С применением конформной инвариантности метрики, приведенную формулу в виде $\lambda(z) = \lambda(0)(1 - |z|^2)^{-1}$ можно получить из соотношений: $z = T(\zeta) = e^{i\alpha}(\zeta - a)/(1 - \overline{a}\zeta)$, $|a| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(z)|dz| = \lambda(\zeta)|d\zeta|, \quad |dz|/|d\zeta| = |T'(\zeta)| \equiv \frac{1 - |z|^2}{1 - |\zeta|^2},$$

полагая $\zeta = 0$.

Приведем теперь аксиомы непрерывности.

1) (Аксиома Архимеда) *Пусть z_1 – произвольная точка на некоторой "прямой", лежащая между произвольно заданными точками z и ζ, далее, строим точки z_2, z_3, z_4, ... так, что точка z_1 лежит между между z и z_2, точка z_2 – между z_1 и z_3, точка z_3 – между z_2 и z_4 и т. д. и сверх того, отрезки $[z, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$, $[z_3, z_4]$ ... конгруентны между собой. Тогда в ряде точек z_2, z_3, z_4, ... существует такая точка z_n, что точка ζ лежит между z и z_n.*

2) (Аксиома Кантора) *Если на некоторой "прямой" существуют последовательность точек z_1, z_2, ..., z_n, ... и последователь-*

ность точек ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n, ... таких, что ζ_q лежит между z_p и ζ_{q-1}, а z_p лежит между ζ_q и z_{p-1} каковы бы ни были p и q, то на этой "прямой" существует по крайней мере одна точка w, лежащая между z_p и ζ_q при любых p и q.

В отличии от геометрии Евклида аксиома параллельности в геометрии Лобачевского звучит следующим образом:

через каждую точку $z \in \mathbb{D}$, не лежащей на заданной "прямой" L, можно провести бесконечное множество различных "прямых", не имеющих общих точек с "прямой" L.

Поясним эту аксиому геометрически. Без ограничения общности мы можем считать, что $z = 0$, а "прямая" L является дугой окружности, ортогональной к единичной окружности $|\zeta| = 1$ и пересекающей $|\zeta| = 1$ в точках $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$, где $\theta \in (0, \pi/2)$ – фиксированный параметр. Легко показать, что L является дугой окружности с уравнением $|\zeta - 1/\cos\theta| = \operatorname{tg}\theta$ и L пересекает вещественную ось в точке

$$x_0 = \frac{1}{\cos\theta} - \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\pi/4 - \theta/2) \in (0, 1).$$

Через L_t обозначим диаметр круга $\mathbb{D}$, имеющий одним из своих концов точку e^{it}, $t \in (0, \pi)$. Поскольку дуга L лежит в секторе $\{\zeta \in \mathbb{D} : \Re\zeta > 0, |\arg\zeta| < \theta\}$, то для любого $t \in (\theta, \pi/2 - \theta)$ диаметр L_t не имеет общих точек с дугой L.

Таким образом, существует бесконечное множество различных "прямых" L_t, проходящих через точку $z = 0$ и не имеющих общих точек с "прямой" L.

Множество диаметров L_t, не имеющих общих точек с дугой L, заполняют два угла раствора $2\,\beta$, где $\beta = \pi/2 - \theta$. Можно указать восходящую к Лобачевскому формулу, выражающую угол параллельности $\theta \in (0, \pi/2)$ через гиперболическое расстояние от выбранной точки до заданной "прямой". Имеем

$$\rho(z, L) = \rho(0, x_0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x_0}{1 - x_0} \Longrightarrow x_0 = \operatorname{th} \rho(z, L).$$

Следовательно, $\operatorname{th} \rho(z, L) = \operatorname{tg}(\beta/2)$, отсюда следует, что

$$\beta = 2 \operatorname{arctg} \operatorname{th} \rho(z, L), \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \operatorname{th} \rho(z, L).$$

6.2 Автоморфные функции

А. Пуанкаре предложил модель с кругом для плоскости Лобачевского в 1882 году в связи с развитием своей публикации 1881 года по функциям Фукса, названных позднее автоморфными функциями. Как принято в настоящее время, непостоянная аналитическая функция F называется автоморфной, если

$$F(z) \equiv F(T(z)), \quad \forall T \in G \tag{6.1}$$

где G – некоторая дискретная группа преобразований плоскости. Дискретность означает, что данная группа не содержит бесконечно близких преобразований.

Понятно, что под это определение подходят элементарные периодические трансцендентные функции, связанные с тригонометрическими функциями и экспонентой, если преобразования группы G определить формулой $T(z) = z + n\omega$, где $n \in \mathbb{Z}$, ω – период, т. е. фиксированное комплексное число, отличное от нуля.

Другие примеры автоморфных функций даны теорией эллиптических функций, разработанной в течение 19-го столетия трудами ряда выдающихся математиков. Речь идет о двоякопериодических функциях, когда элементы группы G даны формулой $T(z) = z + n\omega_1 + m\omega_2$, где $n, m \in \mathbb{Z}$, ω_1, ω_2 – линейно-независимые периоды. Нетрудно доказывается, что число независимых периодов не может быть больше двух, т. е. напрашивающееся обобщение по числу периодов невозможно.

Ряд интересных и поучительных моментов зарождения теории высших автоморфных функций А. Пуанкаре описывает в статье [38], содержащей изложение его доклада Психологическому обществу в Париже.

Формулу (6.1) Пуанкаре увидел в одной из статей Л. Фукса и в течение двух недель безуспешно старался доказать, что таких функций, кроме уже известных, не существует. Затем обнаружил контрпример к своей гипотезе несуществования новых автоморфных функций, пользуясь гипергеометрическими функциями, представил эти функции в виде частного двух рядов по аналогии с эллиптическими функциями и назвал эти ряды тета-фуксовыми функциями.

Решающую роль для зарождения общей идеи построения высших автоморфных функций сыграла придуманная им модель плоскости Лобачевского. Вот описание самого Пуанкаре [38] момента озарения: *... мы взяли омнибус для прогулки; и вот в тот момент, когда я заносил ногу на ступеньку омнибуса, мне пришла в голову идея – хотя мои предыдущие мысли не имели с нею ничего общего, – что те преобразования, которыми я воспользовался для определения фуксовых функций, тождественны с преобразованиями неевклидовой геометрии.*

Такой подход, основанный на дискретных группах движений плоскости Лобачевского, оказался, как известно, очень плодотворным при определении автоморфных функций. Ряд предложений Пуанкаре по терминологии сохранился до настоящего времени, в частности, функции, группы которых являются группами движений пространства Лобачевского, называются функциями Клейна.

Следуя В. В. Голубеву [24], опишем кратко идею Пуанкаре для определения дискретных групп движения при помощи их фундаментальных областей. Пусть на гиперболической плоскости есть многоугольник P_{2m}, ограниченный отрезками неевклидовых прямых, обладающий следующими двумя свойствами.

(6.2) Многоугольник P_{2m} имеет четное число сторон, разбитых на пары. Такие стороны называются эквивалентными и имеют равные длины. Неевклидовы движения, переводящие одну из эквивалентных сторон в другую, образуют *основные подстановки группы автоморфной функции*, имеющей рассматриваемый многоугольник своей фундаментальной областью.

(6.3) Сумма углов, образующих цикл (т. е. вершины которых эквивалентны по отношению к группе движений), равна либо 2π (простой цикл), либо $2\pi/\nu$, где ν – целое число (критический цикл).

Справедлива следующая теорема, доказанная А. Пуанкаре.

Если мы имеем многоугольник P_{2m}, удовлетворяющий двум основным условиям (6.2) *и* (6.3), *то, применяя к нему группу движений, определяемую его основными преобразованиями, можно покрыть однолистно и сплошь всю неевклидову плоскость.*

Таким образом, при помощи фундаментального многоугольника можно определить дискретную группу движений гиперболической плоскости. Можно также доказать, что и, обратно, всякая дискретная группа движений может быть получена указанным способом.

Ясно, что гениальная идея проста, так как построение многоугольников гиперболической плоскости, удовлетворяющих условиям (6.2) и (6.3), представляет собой задачу элементарной геометрии.

Как известно (см., например, монографию В. В. Голубева [24], с. 408), задача о построении автоморфных функций Фукса по заданной группе была решена одновременно Ф. Клейном и А. Пуанкаре, причем разными методами. Пуанкаре строил соответствующие автоморфные функции при помощи особых рядов, которые теперь носят название рядов Пуанкаре. Таким образом, математический анализ пополнился большим семейством новых высших трансцендентных функций.

Наиболее важным применением теории автоморфных функций считается их приложение к униформизации алгебраических функций. Приведем необходимое определение.

Пусть дана алгебраическая функция f, определяемая решением уравнения $A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + ... + A_n(z) = 0$, где $A_k(z)$ – многочлен от z. Обозначим $w = f(z)$. В общем случае алгебраическая функция f является многозначной функцией, имеющей n значений при данном z. Проблема униформизации формулируется следующим образом: *надо выразить $w = \varphi(t)$ и $z = \psi(t)$ как однозначные функции некоторого вспомогательного переменного t так, чтобы удовлетворялось полиномиальное уравнение и чтобы при подходящих значениях t функция $w = \varphi(t)$ давала все значения функции $w(z)$.*

Ограничимся этими краткими указаниями. Заинтересованный читатель может обратиться к ряду монографий по богатой теории автоморфных функций

6.3 Список основных характеристик и литература

Пусть $p \in [1, \infty)$. Следующие константы-характеристики $c_p(\Omega)$, $c_p^*(\Omega)$ и $c_p^{**}(\Omega)$ плоских областей гиперболического типа являются неотрицательными конформно инвариантными величинами:

$$c_p(\Omega) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |\nabla u(z)|^p / R^{2-p}(z, \Omega)\, dx\, dy}{\iint_\Omega |u(z)|^p / R^2(z, \Omega)\, dx\, dy},$$

$$c_p^*(\Omega) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |\Delta u(z)|^p / R^{2-2p}(z,\Omega)\, dx\ dy}{\iint_\Omega |\nabla u(z)|^p / R^{2-p}(z,\Omega)\, dx\, dy},$$

$$c_p^{**}(\Omega) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |\Delta u(z)|^p / R^{2-2p}(z,\Omega)\, dx\ dy}{\iint_\Omega |u(z)|^p / R^{2}(z,\Omega)\, dx\, dy}.$$

Также является конформно инвариантной величина

$$c_{p,q}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \left(\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p dxdy}{R^{2-p}(z,\Omega)} \right)^{1/p} \left(\iint_\Omega \frac{|u|^q dxdy}{R^{2}(z,\Omega)} \right)^{-1/q},$$

где $1 < p, q < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – область гиперболического типа. Очевидно, $c_2(\Omega) = c_{2,2}^2(\Omega)$.

Наибольшая из возможных постоянная в интегральном неравенстве для полигармонических операторов дана формулой

$$C_2^{(m)}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |\Delta^{m/2} u|^2 dx\, dy}{\iint_\Omega |u|^2 (\mathrm{dist}(z, \partial\Omega))^{-2m} dx\, dy} \in [0, \infty).$$

Постоянная $C_2(\Omega) = C_2^{(2)}(\Omega)$. Родственная к $C_2(\Omega)$, но иная постоянная $C_2^*(\Omega) \in [0, \infty)$ определяется формулой

$$C_2^*(\Omega) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega (\mathrm{dist}(z, \partial\Omega))^2 |\Delta u|^2 dx\, dy}{\iint_\Omega |u|^2 (\mathrm{dist}(z, \partial\Omega))^{-2} dx\, dy}.$$

Кроме максимальных модулей $M_0(\Omega)$ и $M(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа полезными являются следующие числовые параметры:

$$\alpha(\Omega) := \inf_{z \in \Omega} \frac{\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)}{R(z,\Omega)}, \quad \gamma(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} |\nabla R(z,\Omega)|,$$

$$\beta(\Omega) := \sup_{z \in \Omega} \sqrt{\frac{R^3(z,\Omega)}{16}\, \Delta^2 R(z,\Omega)}.$$

Имеем нетривиальные связи:

$$M(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow M_0(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow \alpha(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow \beta(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \gamma(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow C_2(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow C_2^*(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ такое, что } C_2^{(m)}(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow C_2^{(m)}(\Omega) > 0 \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Важной является следующая константа, определяемая для фиксированных $p \in [1, \infty)$ и $s \in \mathbb{R}$:

$$c_p(s, \Omega) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega (\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^{p-s} |\nabla u|^p dx\, dy}{\iint_\Omega |u|^p (\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^{-s} dx\, dy},$$

т. е. оптимальная константа в неравенстве

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p dx\, dy}{(\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^{s-p}} \geq c_p(s, \Omega) \iint_\Omega \frac{|u|^p dx\, dy}{(\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^s} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ гиперболического типа определена конформно инвариантная постоянная

$$c_{p[n]}(\Omega) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega),\, u \not\equiv 0} \int_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{R^{n-p}(x, \Omega)} dx \Big/ \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{R^n(x, \Omega)} dx$$

и евклидово инвариантная постоянная $\sigma_{p[n]}(s, \Omega)$ как максимальная в неравенстве

$$\int_\Omega \frac{|(\nabla u(x), \nabla R(x, \Omega))|^p\, dx}{R^{s-p}(x, \Omega)} \geq \sigma_{p[n]}(s, \Omega) \int_\Omega \frac{|u(x)|^p dx}{R^s(x, \Omega)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Очевидно, $c_p(\Omega) = c_{p[2]}(\Omega)$.

Литература

[1] Абрамов Д. А. *Нижние оценки для константы эквивалентности жесткости кручения и момента инерции относительно границы.* Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, **153** (4), 59–66 (2011)

[2] Авхадиев Ф. Г. *Метрики с переменной плотностью и обратные краевые задачи.* Труды семинара по краевым задачам, Казань: Изд-во Казанск. ун-та, вып. 27, 3–23 (1990)

[3] Авхадиев Ф. Г. *Вариационные конформно-инвариантные неравенства и их приложения.* Докл. АН, **359** (6), 727–730 (1998)

[4] Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана.* Матем. сборник, **189** (12), 3–12 (1998)

[5] Авхадиев Ф. Г. *Новые изопериметрические неравенства для моментов областей и жесткости кручения.* Известия вузов. Матем. **135** (7), 3–11 (2004)

[6] Авхадиев Ф. Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах.* Тр. матем. инст. им. В.А. Стеклова, **255**, 8–18 (2006)

[7] Авхадиев Ф. Г. *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна* 1/4. Известия РАН. Сер. матем. **78** (5), 3–26 (2014)

[8] Авхадиев Ф. Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения.* Матем. сборник, **206** (12), 3–28 (2015)

[9] Авхадиев Ф. Г. *Конформно инвариантные неравенства.* Комплексный анализ. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ, М. **142**, 28–41 (2017)

[10] Авхадиев Ф. Г. *Обобщенная проблема Дэвиса для полигармонических операторов.* Сиб. матем. журн. **58** (6), 1205–1217 (2017)

[11] Авхадиев Ф. Г. *Неравенства Реллиха для полигармонических операторов в областях на плоскости.* Матем. сборник, **209** (3), 4–33 (2018)

[12] Авхадиев Ф. Г. *Интегральные неравенства Харди и Реллиха в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы.* Алгебра и анализ, **30** (2), 18–44 (2018)

[13] Авхадиев Ф. Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* Казань: Изд-во Казанск. ун-та. Издание второе, переработанное и дополненное, 412 с. (2019)

[14] Авхадиев Ф. Г. *Конформно инвариантные неравенства в областях евклидова пространства.* Известия РАН. Сер. матем. **83** (5), 3–26 (2019)

[15] Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К. *Конформные инварианты плоских областей гиперболиеского типа.* Уфимск. матем. журн. **11** (2), 3–18 (2019)

[16] Авхадиев Ф. Г., Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковкого для евклидовых и конформных моментов областей.* Известия вузов. Матем. № 5, 69–73 (2014)

[17] Авхадиев Ф. Г., Шабалина С. Б. *Нули коэффициентов преобразований и условия разрешимости обратных краевых задач.* Известия вузов. Матем. № 8, 3–10 (1994)

[18] Авхадиев Ф. Г., Шафигуллин И. К. *Точные оценки констант Харди для областей со специальными граничными свойствами.* Известия вузов. Матем. № 2, 69–73 (2014)

[19] Альфорс Л. *Преобразования Мебиуса в многомерном пространстве.* Москва: Мир (1986)

[20] Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. *Кручение упругих тел.* Москва: ГИФМЛ (1963)

[21] Бураго Ю. В., Залгаллер В. А. *Геометрические неравенства.* Ленинград: Наука (1980)

[22] Векуа И. Н. *Замечания о свойствах решения уравнения* $\Delta u = -2Ke^u$. Сиб. матем. журн. **1** (3), 331–342 (1960)

[23] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Москва: Наука, 628 с. (1966)

[24] Голубев В. В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 436 с. (1950)

[25] Горяйнов В. В. *Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях.* Успехи матем. наук, **67**, вып. 6(408), 5–52 (2012)

[26] Дубинин В. Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Успехи матем. наук, **49**, вып. 1(295), 3–76 (1994)

[27] Дубровин В. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия.* Москва: Наука (1979)

[28] Казанцев А. В. *О выходе из множества Гахова по семейству классов Авхадиева.* Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, **159** (3), 318–326 (2017)

[29] Киндерлерер Д., Стампаккья Г. *Введение в вариационные неравенства и их приложения.* Москва: Мир, 256 с. (1983)

[30] Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* Москва: Наука (1973)

[31] Мазья В. Г. *Пространства С.Л. Соболева.* Ленинград: изд. Ленинградского университета (1985)

[32] Маклаков Д. В. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами.* Москва: Янус-К, 280 с. (1997)

[33] Маркушевич А. И. *Теория аналитических функций.* Т. 1, Москва: Наука, 486 с. (1967)

[34] Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* Москва: Наука, 393 с. (1976)

[35] Насыров С. Р. *Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей.* Казань: Магариф, 279 с. (2008)

[36] Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства математической физики.* Москва: Физматгиз, 336 с. (1962)

[37] Прохоров Д. В., Степанов В. Д., Ушакова Е. П. *Интегральные операторы Харди-Стеклова.* Совр. пробл. матем. **22**, МИАН, Москва, 186 с. (2016)

[38] Пуанкаре А. *Математическое творчество.* В книге: Пуанкаре А. "О науке"(под ред. Л. С. Понтрягина), Москва: Наука, 399–414 (1989)

[39] Решетняк Ю. Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* Новосибирск: Наука, 285 с. (1982)

[40] Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Москва: Наука, 336 с. (1988)

[41] Соболев С. Л. *Избранные вопросы теории функциональных проствонств и обобщенных функций.* Москва: Наука (1989)

[42] Харди Г. Г. , Литтльвуд Дж. Е. и Полиа Г. *Неравенства.* (С дополнениями В. И. Левина и С. Б. Стечкина.) Москва: ИЛ, 456 с. (1948)

[43] Чирка Е. М. *Пространства Тейхмюллера.* Лекц. курсы НОЦ (Mathnet.ru), вып. 15, 3–150 (2010)

[44] Abramov D. A., Avkhadiev F. G., Giniyatova D. Kh. *Versions of the Schwarz lemma for domain moments and the torsional rigidity.* Lobachevskii J. Math. **32** (2), 149–158 (2011)

[45] Abramovitz M. and Segun I. A. (ed.) *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publ., New York (1968)

[46] Agard S. *Distortion theorems for quasiconformal mappings.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI **413** 12p. (1968)

[47] Ahlfors L. V. *Conformal invariants, Topics in Geometric Function Theory.* New-York: McGraw - Hill (1973)

[48] Aksent'ev L. A., Shabalin P. L. *Sufficient Conditions for Univalence and Quasiconformal Extendibility of Analytic Functions.* In "Handbook of Complex Analysis. Geometric Function Theory. V. 1" Edited by R. Kühnau. Elsevier Science, Chapter 7, 169–206 (2002)

[49] Alvarez V., Pestana D., Rodríguez J. M. *Isoperimetric inequalities in Riemann surfaces of infinite type.* Revista Matem. Iberoamericana, **15** (2), 353–425 (1999)

[50] Ancona A. *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$. J. London Math. Soc. (2), **37**, 274–290 (1986)

[51] Avkhadiev F. G. *Moebius transformation and multiplicative representations for spherical potentials.* Publications de l'Institut Mathematique. Nouvelle serie, **75** (89), 119–130 (2004)

[52] Avkhadiev F. G. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants.* Lobachevskii J. Math. **21**, 3–31 (2006)

[53] Avkhadiev F. G. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space.* J. Math. Anal. Appl. **442** (5), 469–484 (2016)

[54] Avkhadiev F. G. *Sharp Hardy constants for annuli.* J. Math. Anal. Appl. **466**, 936–951 (2018)

[55] Avkhadiev F. G. *Euclidean maximum moduli of plane domains and their applications.* Complex Variables and Elliptic Equations, **64** (11), 1869–1880 (2019)

[56] Avkhadiev F. G., and Kacimov A. R. *Analytical solutions and estimates for microlevel flows.* Journal of Porous Media, **8** (2), 125–148 (2002)

[57] Avkhadiev F. G. and Kayumov I. R. *Comparizon theorems of isoperimetric type for moments of compact sets.* Collectanea Math. **55** (3), 553–563 (2004)

[58] Avkhadiev F. G. and Laptev A. *Hardy Inequalities for Nonconvex Domains.* Int. Math. Series "Around Research of Vladimir Maz'ya, I". Function Spaces, **11**, Springer, 1–12 (2010)

[59] Avkhadiev F. G., Pommerenke Ch., Wirths K.-J. *Sharp inequalities for the coefficients of concave schlicht functions.* Comment. Math. Helv. **81**, 801–807 (2006)

[60] Avkhadiev F. G., Salahudinov R. G. *Isoperimetric inequalities for conformal moments of plane domains.* J. Inequal. Appl. **7** (4), 593–601 (2002)

[61] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick inequalities for hyperbolic domains in the extended plane.* Geom. Dedicata, **106**, 1–10 (2004)

[62] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *The conformal radius as a function and its gradient image.* Isr. J. Math. **145**, 349–374 (2005)

[63] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains.* Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), **87** (8-9), 632-642 (2007)

[64] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick Type Inequalities.* Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser Verlag, 156 pp. (2009)

[65] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *On the best constants for the Brezis-Marcus inequalities in balls.* J. Math. Anal. Appl. **396**, 473–480 (2012)

[66] Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* Universitext, Springer, Heidelberg - New York - Dordrecht - London, 263 pp. (2015)

[67] Bandle C. *Isoperimetric Inequalities and Applications*. Pitman Monographs and Studies in Math. **7**, Boston, 228 pp. (1980)

[68] Bandle C. and Flucher M. *Harmonic radius and concentration of energy: hyperbolic radius and Liouville's equations $\Delta U = e^U$ and $\Delta U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$*. SIAM Review, **38** (2), 191–238 (1996)

[69] Bañuelos M., Berg Van Den M. and Carrol T. *Torsional rigidity and expected lifetime of Brownnian motion*. J. London Math. Soc. (2), **66**, 499–512 (2002)

[70] Barbatis G., Filippas S., and Tertikas A. *Refined L^p Hardy inequalities*. Comm. Cont. Math. **5** (6), 869–881 (2003)

[71] Beardon A. E., Pommerenke Ch. *The Poincaré metric of plane domains*. J. London Math. Soc. (2), **18**, 475–483 (1978)

[72] Bobkov S. G. and Houdré Ch. *Some connections between Isoperimetric and Sobolev-type Inequalities*. Memoires of the Amer. Math. Soc. **616**, 1–111 (1997)

[73] Brezis H. and Marcus M. *Hardy's inequalities revisited*. Dedicated to Ennio De Giorgi, Ann. Scuola Sup. Pisa Cl. Sci.(4) **25**, 217–237 (1997, 1998)

[74] Caldiroli P., Musina R. *Rellich inequalities with weights*. Calc. Var. **45**, 147–164 (2012)

[75] Carbery A., Maz'ya V., Mitrea M., Rule D. *The Integrability of Negative Powers of the Solution of the Saint Venant Problem*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa-Cl. Sci. **13** (2), 465–531 (2014)

[76] Carleson L., Gamelin T. W. *Complex dynamics*. New-York: Springer (1993)

[77] Cheeger J. *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian.* Problems in Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 147–164 (1970)

[78] Davies E. B. *The Hardy constant.* Quart. J. Math. Oxford (2), **46** (4), 417–431 (1995)

[79] Duren P. L. *Univalent functions.* New York: Springer (1980)

[80] Federer H. and Fleming W. H. *Normal and integral currents.* Ann. Math. **72**, 458–520 (1960)

[81] Fernández J. L. *Domains with Strong Barrier.* Revista Mat. Iberoamericana, 5, 47–65 (1989)

[82] Fernández J. L. and Rodríguez J. M. *The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Mathematica. **15**, 165–182 (1990)

[83] Garnett J. B. and Marshall D. E. *Harmonic measure.* Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005)

[84] Gazzola F., Grunau H.-Ch., Sweers G. *Polyharmonic boundary value problems.* Berlin-Heidelberg: Springer, **1991** Lect. Notes Math. (2010)

[85] Goodman A. W. *Univalent functions.* Tampa, FL: Mariner Publ. Comp. (1983)

[86] Hadwiger H. *Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente.* Comment. Math. Helv. **30**, 285–296 (1956)

[87] Harmelin R. *Locally convex functions and the Schwarzian derivative.* Israel J. Matn. **67**, 367–379 (1989)

[88] Helgason S. *Groups and Geometric Analysis. Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions.* Academic Press, Inc. (1984)

[89] Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., and Laptev A. *A Geometrical Version of Hardy's Inequality.* J. Func. Anal. **189**, 539–548 (2002)

[90] Järvi P., Vuorinen M. *Uniformly perfect sets and quasiregular mappings.* J. London Math. Soc. (2), **54**, 515–529 (1996)

[91] Jørgensen V. *On an inequality for the hyperbolic measure and its applications to the theory of functions.* Mathematica Scandinavica, **4**, 113–124 (1956)

[92] Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, B.* G. Teubner, Stuttgart (1977)

[93] Keady G. *On a Brunn-Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev.* JIPAM, **8** (2), art. 33, 10 pp. (2007)

[94] Knothe H. *Contributions to the theory of convex bodies.* Michigan Math. J., **4**, 39–52 (1957)

[95] Liendler L. *On a certain converse of Hölder's inequality II.* Acta Sci. Math. (Szeged), **33**, 217–223 (1972)

[96] Loewner C. and Nirenberg L. *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations.* Contribution to Analysis, New York: Acad. Press, 245–272 (1974)

[97] Ma W., Minda D. *Behavior of domain constants under conformal mappings.* Israel J. Math. **91**, 157–171 (1995)

[98] Miklyukov V. M., Vuorinen M. R. *Hardy's inequality for $W_0^{1,p}$-functions on Riemannian manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (9), 2145–2154 (1999)

[99] Miller S. S. and Mocanu P. T. *Differential subordination, Theory and applications.* Marcel Dekker Inc., New York (2000)

[100] Osgood B. *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric.* Indiana University Math. J. **31**, 449–461 (1982)

[101] Owen M. P. *The Hardy-Rellich inequality for polyharmonic operators.* Proc. Royal Soc. Edinburgh, A, **129** (5), 825–839 (1999)

[102] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Functionen. I.* Math. Ann. **155**, 108–154 (1964)

[103] Pommerenke Ch. *Univalent functions.* Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 382 pp. (1975)

[104] Pommerenke Ch. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric.* Arch. Math. **32**, 192–199 (1979)

[105] Pommerenke Ch. *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1992)

[106] Prékopa A. *Logariphmic concave measures with application to stochastic programming.* Acta Sci. Math. (Szeged), **32**, 301–315 (1971)

[107] Prokhorov D. V. *Bounded univalent functions.* Handbook in complex analysis: Geometric Function Theory **1**, North-Holland, Amsterdam, 207–228 (2005)

[108] Rademacher H. *Über partielle und totale Differenzierbarkeit I.* Math. Ann. **89** (4), 340–359 (1919)

[109] Rellich F. *Perturbation theory of eigenvalue problems*. Gordon and Breach, New York - London - Paris (1969)

[110] Rudin W. *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1980)

[111] de Saint-Venant B. *Mémoire sur la torsion des prismes*. Mémoire présentés par divers savants á l'Académie des Sciences, 14, 233–560 (1856)

[112] Salahudinov R. G. *Isoperimetric Inequality for Torsional Rigidity in the Complex Plane*. J. Ineq. Appl. **6** (4), 253–260 (2001)

[113] Solynin A. Yu. and Vuorinen M. *Estimates for the hyperbolic metric of the punctured plane and applications*. Isr. J. Math. **124**, 29–60 (2001)

[114] Stein E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Funtions*. Princeton Univ. Press, Princeton, New York (1970)

[115] Sugawa T. *Various domain constants related to uniform perfectness*. Complex Var. Theory Appl. **36**, 311–345 (1998)

[116] Sugawa T. *Uniformly perfect sets: analytic and geometric aspects*. Sugaku Expositions, **16** (2), 225–242 (2003)

[117] Sullivan D. *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*. J. Differential Geom. **25**, 327-351 (1987)

[118] Timoshenko S. R. *History of the strength of materials*. McGraw-Hill, London (1954)

6.4 Summary and content in English

Avkhadiev F. G. *Conformally invariant inequalities.* — Kazan Federal University. 2020. – 260 p. (in Russian)

We describe isoperimetric problems and conformally invariant integral inequalities on plane and space domains endowed with hyperbolic Poincaré metric.

The book will be of interest for postgraduate students and researchers in Geometric Function Theory and its applications.

References: 118 items.

Научное издание

Авхадиев Фарит Габидинович

КОНФОРМНО ИНВАРИАНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Компьютерная верстка
Ф.Г. Авхадиева

Дизайн обложки
Р.М. Абдрахмановой

Подписано в печать 10.03.2020.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60х84 1/16. Гарнитура "Times New Roman".
Усл. печ. л. 15,1.
Тираж 100 экз. Заказ 18/3

Отпечатано в типографии
Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28